Autour du dénombrement

1 Rappels

....
....

2 Application

Soit E un ensemble non vide.
On appelle *partition* de E tout ensemble $\mathcal{U} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ de parties de E tel que :
i)Chaque A_i, pour $i \in [\![1, k]\!]$ est une partie *non vide* de E.
ii)Les parties $A_1, \ldots, A_k$ sont *deux à deux disjointes*, c'est-à-dire que pour tous $i \neq j$ entre 1 et k, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
iii)La réunion des A_i forme E tout entier i.e $E = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.
Si $\mathcal{U}$ une partition de E et si k est le nombre d'éléments de $\mathcal{U}$, on dit aussi que $\mathcal{U}$ une *partition de E en k parties*.

2.1 Nombre de partitions en k parties

1) Soit k et n deux entiers strictement positifs. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties.

Dans tout le problème, pour tout couple (n, k) d'entiers strictement positifs, on note $S(n, k)$ le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties.
On pose de plus
$S(0, 0) = 1$ et, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^{*2}$,
$S(n, 0) = S(0, k) = 0$.

2) Exprimer $S(n, k)$ en fonction de n ou de k dans les cas suivants :
i) $k > n$.
ii) $k = n$.
iii) $k = 1$.
3) Montrer que pour tous k et n entiers strictement positifs, on a :

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$$

Indication(On pourra distinguer les partitions de $[\![1, n]\!]$ selon qu'elles contiennent ou non le singleton $\{n\}$.)

2.2 Nombres de Bell

Dans toute la suite, on pose pour tout entier $n \geq 0$,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)$$

4) Montrer que pour $n \geq 1$, B_n est égal au nombre total de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
5) Etablir la formule (Aitken 1933) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

6) Montrer que la suite $\left(\dfrac{B_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.
7) En déduire une minoration du rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}z^n$.

Pour $x \in]-R,R[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$.
8) Vérifier que, pour tout $x \in]-R,R[$, $f'(x) = e^x f(x)$.
9) En déduire une expression de f sur son intervalle de définition.

2.3 Une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ par $H_0(X) = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$H_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$$

11) Prouver que la famille $(H_0,\dots,H_n)$ est une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.
12) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, établir une expression simplifiée de $H_{k+1}(X) + kH_k(X)$.
13) En déduire que, pour tout entier naturel n, $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S(n,k)H_k(X)$.
14) Soit $k \in \mathbb{N}$.
Montrer que la fonction $f_k : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!}$ est définie sur $]-1,1[$.
15) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $g_k : x \mapsto \dfrac{(e^x-1)^k}{k!}$.
Montrer que la fonction g_k vérifie l'équation différentielle : $y' = \dfrac{(e^x-1)^{k-1}}{(k-1)!} + ky$.
16) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{(e^x-1)^k}{k!} = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!}$.
17) Pour $x \in]-1,1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha)\frac{x^k}{k!}$.
18) Etablir que, $u < \ln 2$, $e^{u\alpha} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha)\frac{(e^u-1)^k}{k!}$.

2.4 Fonctions génératrices

On se donne dans la suite un espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires (toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$ considérées seront définies.
Soit m un entier strictement positif.
On dit qu'une variable aléatoire Y admet un moment d'ordre m fini si Y^m admet une espérance finie, c'est-à-dire si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^m\mathbb{P}(Y=n)$ converge.
On appelle alors moment d'ordre m de Y la somme de cette série.
19) Montrer que si Y est une variable aléatoire associée à une fonction génératrice G_Y de rayon strictement supérieur à 1, alors Y admet à tout ordre un moment fini.
Réciproquement, soit Y une variable aléatoire admettant à tout ordre un moment fini.
20) Montrer que la fonction génératrice G_Y est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.
21) Exprimer $G_Y^{(k)}(1)$ à l'aide des polynômes $H_k(X)$ et de la variable Y.
22) La fonction génératrice G_Y a-t-elle nécessairement un rayon de convergence strictement supérieur à 1?
Indication (On pourra utiliser la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}x^n$.)
23) On suppose dans cette question que Y suit la loi de Poisson de paramètre 1.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = E(Y^n)$ (Dobinski 1877).

24) En déduire que pour tout polynôme $Q(X)$ à coefficients entiers, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q(n)}{n!}$ est convergente et sa somme est de la forme Ne, où N est un entier.

2.5 Somme de puissances

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$, ce pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

25) A l'aide d'un encadrement par des intégrales, déterminer un équivalent de $V_p = \sum_{k=0}^{p} k^n$ lorsque p tend vers $+\infty$.
26) Soit Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur le sous-espace stable $\mathbb{R}_n[X]$.
Déterminer la matrice A de Δ_n dans la base $(H_0, \ldots, H_n)$.
27) En déduire que $V_p = \sum_{k=0}^{n} \frac{S(n,k)}{k+1} H_{k+1}(p+1)$.
On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(0) = 0\}$ et $G = Vect(X^{2k+1}, 0 \leq k \leq n-1)$.
Soit Q le polynôme tel que $\forall p \in \mathbb{N}$, $Q(p) = \sum_{k=0}^{p} k$.
28) Rappeler l'expression de Q.
29) Montrer que l'application $\Phi : P \in F \to \Delta(P(Q(X-1)))$ réalise un isomorphisme de F sur G.
30) En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe un seul polynôme P_r tel que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{p} k^{2r+1} = P_r\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)$.
31) Déterminer le terme dominant dans P_r.
32) Montrer que pour $r \geq 1$, X^2 divise P_r.
33) Expliciter les polynômes P_1 et P_2.

2.6 Retour à la combinatoire

Les nombres $S(n,k)$, où n et k sont des entiers naturels, sont appelés nombres de Stirling de deuxième espèce.
On cherche à déterminer le nombre de surjections de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ sur l'ensemble $[\![1,k]\!]$, où $1 \leq k \leq n$.
34) Prouver que si ϕ est une telle surjection alors $U(\phi) = \{\phi^{-1}(\{1\}), ..., (\phi^{-1}(\{k\})\}$ se trouve être une partition de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ en k parties.
35) Inversement soit W une partition de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ en k parties.
Montrer qu'il existe une surjection ϕ de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,k]\!]$ telle que $W = U(\phi)$.
36) Etablir que le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,k]\!]$ vaut $k!S(n,k)$.
37) Retrouver alors la formule obtenue à la question 13) mais par un biais purement combinatoire.
Pour finir et à titre culturel on définit, pour les entiers naturels n et k, les nombres $s(n,k)$ dits de Stirling de première espèce par les relations $H_n = \sum_{k=0}^{\infty} s(n,k)X^k$ (en particulier $s(n,k) = 0$ si $k > n$); leur interprétation combinatoire s'avère plus délicate à formuler. La question 13) vous permet néanmoins de voir ces nombres (pour $n \geq k$) comme coefficients de l'inverse de la matrice $(S(i-1, j-1))_{1 \leq i,j \leq n+1}$.
Solution :
30) Supposons que H et L soient des polynômes vérifiant : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{p} k^{2r+1} = H(\frac{p(p+1)}{2}) = L(\frac{p(p+1)}{2})$.
Le polynôme différence $H - L$ s'annule en tous les $\frac{p(p+1)}{2}$, où p décrit $\mathbb{N}$ donc en une infinité de points; $H - L$ étant le polynôme nul, l'unicité en découle.
La surjectivité de Φ nous garantit l'existence d'un polynôme P, nul en 0, tel que $\Phi(P) = X^{2r+1}$.
Dès lors et pour tout entier naturel p et après spécialisation :
$\sum_{k=1}^{p} k^{2r+1} = \sum_{k=1}^{p} \Phi(P)(k) = \sum_{k=1}^{p} (P(\frac{k(k+1)}{2}) - P(\frac{k(k-1)}{2}) = P(\frac{p(p+1)}{2}) - P(0) = P(\frac{p(p+1)}{2})$; ceci prouve la partie existence de cette question ■

31) Posons a_sX^s comme étant le terme dominant de P_r alors $P(\frac{p(p+1)}{2}) \sim a_s\frac{p^{2s}}{2^s}$ et l'équivalent déterminé en 25) donne lui $\frac{p^{2r+2}}{2r+2}$ (tout cela pour $p \to +\infty$); on déduit de cela $s = r+1$ et $a_s = \frac{2^r}{r+1}$■
32) On sait déjà que (cf réponse à Q30) que X divise P_r, ce pour tout r.
Si on pose $P_r = aX + Q$, où Q est divisible par X^2, de l'égalité $\Phi(P_r) = X^{2r+1}$ on déduit que aX devrait être divisble par X^2 donc que $a = 0$■
33) Compte tenu des renseignements collectés $deg(P_1) = 2$ (Q31) et coefficient dominant (même référence) valant 1 et (question précédente), ce polynôme est divisible par X^2. En conséquence $P_1 = X^2$.
Cette fois $deg(P_2) = 3$ et coefficient dominant égal à $\frac{4}{3}$ et X^2 divise toujours notre polynôme. Il existe donc un réel b tel que $P_2 = \frac{4}{3}X^3 + bX^2$ mais on a aussi (caractérisation P_2) pour $p = 1$: $P_2(1) = 1$ donc $b = -\frac{1}{3}$■
34) Puisque ϕ est une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$ les $\phi^{-1}(\{i\})$ sont deux à deux disjoints et de réunion égale à $[\![1,n]\!]$ mais ϕ est aussi surjective donc aucun des $\phi^{-1}(\{i\})$ n'est vide ainsi $U(\phi)$ est une partition de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ en k parties■
35) et 36) Posons $W = \{A_1, ..., A_k\}$ alors $U(\phi) = W$ équivaut à dire qu'il existe une permutation σ de $[\![1,k]\!]$ telle que $\phi^{-1}(\{i\}) = A_{\sigma(i)}$, ce pour tout i de $[\![1,k]\!]$; ce qui montre qu'il existe $k!$ surjections de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,k]\!]$ dont l'image par U est W et prouve la formule de la question 36)■
37) Donnons nous n un entier naturel non nul.
Pour tout entier naturel non nul k, on rappelle que le nombre d'applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$ est égal à k^n.
Nommons X cet ensemble d'applications que nous partitionnons comme réunion des X_s (où $s \in [\![1,k]\!]$), ce dernier désignant l'ensemble des éléments de X dont l'image est de cardinal s.
Dénombrons X_s en repartitionnant cet ensemble comme réunion des Y_F (où F partie de $[\![1,k]\!]$ à s éléments), cet ensemble correspondant aux éléments de X_s dont l'image est F qui est aussi l'ensemble des surjections de $[\![1,n]\!]$ sur F dont le nombre est $s!S(n,s)$ dès lors par additivité $X_s = \binom{k}{s}s!S(n,s)$ puis, en passant au cardinal de X, $k^n = \sum_{s=1}^{k} S(n,s)H_s(k) = \sum_{s=1}^{n} S(n,s)H_s(k)$ (par propriété des nombres de Stirling de deuxième espèce).
Il en résulte que le polynôme $X^n - \sum_{s=1}^{n} S(n,s)H_s$ s'annule sur $\mathbb{N}$ donc est nul, ce qui donne Q13■