Devoir à la maison n° 10
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Par exemple, la fonction nulle vérifie (E).
2. (a) On a directement : $g(0) = f(0) - f(0) = 0$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :
$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0) = \frac{f(x)+f(y)}{2} - f(0) = \frac{f(x)-f(0)+f(y)-f(0)}{2} = \frac{g(x)+g(y)}{2},$$
donc g vérifie (E).
(b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Comme g vérifie (E), on a : $g(x+y) = g\left(\frac{2x+2y}{2}\right) = \frac{g(2x)+g(2y)}{2}$.
De plus, comme $g(0) = 0$: $g\left(\frac{2x+0}{2}\right) = \frac{g(2x)+g(0)}{2} = \frac{g(2x)}{2}$, donc $g(2x) = 2g(x)$, et de même $g(2y) = 2g(y)$. Donc : $g(x+y) = \frac{2g(x)+2g(y)}{2} = g(x) + g(y)$.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme g vérifie (E'), on a : $g(x) = g((x-x_0)+x_0) = g(x-x_0) + g(x_0)$, d'où le résultat voulu.
(b) Quand uand $x \to x_0$, on a $x - x_0 \to 0$. Or, comme f est continue en 0, g l'est également ; donc $g(x-x_0) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} g(0) = 0$. D'après le résultat précédent, on a donc : $g(x) - g(x_0) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} g(x_0)$. Donc g est continue en x_0.
4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$h(x+1) = g(x+1) - a(x+1) = g(x) + g(1) - ax - a = g(x) - ax = h(x),$$
donc h est 1-périodique.
D'après la question précédente, g est continue sur $\mathbb{R}$, donc h l'est également ; donc, d'après le théorème de Weierstrass, h admet un minimum et un maximum.
(b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :
$$h(x+y) = g(x+y) - a(x+y) = g(x) + g(y) - ax - ay = h(x) + h(y),$$
donc h vérifie (E').
(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme h vérifie (E'), on a : $h(x+c) = h(x) + h(c) = h(x) + M$. Or $h(x+c) \leq M$, donc $h(x) + M \leq M$, donc $h(x) \leq 0$. Donc h est négative.
(d) Soit $d \in \mathbb{R}$ tel que $h(d) = m$. On a de même que précédemment : $\forall x \in \mathbb{R},\ m \leq h(x+d) = h(x) + m$, donc $h(x) \geq 0$. Donc h est positive.
Comme h est à la fois positive et négative, h est nulle, donc $g : x \mapsto ax$, donc $f : x \mapsto ax + b$ en notant $b = f(0)$. Donc f est affine.
Réciproquement, toute fonction affine vérifie (E), donc :
$$S = \{f : x \mapsto ax + b\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2.

1. Comme f est continue sur $[x, x+\alpha]$ et dérivable sur $]x, x+\alpha[$, il existe d'après le théorème des accroissements finis $c_1 \in]x, x+\alpha[$ tel que $f(x+\alpha) - f(x) = f'(c_1)\alpha$.
2. D'après la question précédente : $\dfrac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} - f'(x) = f'(c_1) - f'(x)$. Comme f est C^2, il existe, encore d'après le théorème des accroissements finis, $c_2 \in]x, c_1[\subset]x, x+\alpha[$ tel que : $f'(c_1) - f'(x) = f''(c_2)(c_1 - x)$, d'où la formule voulue.
3. D'après la question précédente : $f'(x) = \dfrac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} - f''(c_2)(c_1 - x)$, donc, par inégalité triangulaire :
$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+\alpha)| + |f(x)|}{\alpha} + |f''(c_2)||c_1 - x| \leq \frac{2M_0}{\alpha} + M_2\alpha.$$
4. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = -\dfrac{2M_0}{x^2} + M_2$, donc g admet un minimum en $a = \sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$, avec $g(a) = 2\sqrt{2}\sqrt{M_0 M_2}$. On a donc la borne voulue, avec $k = 2\sqrt{2}$.