X-ENS-ESPCI PC 2024

Eléments de correction

$\boxed{\text{Remarque.}}$ Ce sujet comporte un bon nombre de questions accessibles. Voici une petite classification (subjective évidemment) des questions de ce sujet :

- 19 questions de cours, d'applications directes du cours ou de calcul élémentaire/classique :
  1 ;2 ;3(a,b,c) ;4 ;5(a) ;13(a,b) ;16 ;17(a) ;19(a) ;21(a,b,c) ; 22(b) ; 23(a) ; 24(a) ; 25(a)
- 15 questions qui ne nécessitent pas d'initiative particulière, ni astuce mais de bien écrire les choses en comprenant les objets manipulés :
  5(b,c) ; 6(a,b) ; 7(a,b,c) ; 9(a,b) ; 10(a) ; 11(a) ; 17(b) ;18 ; 22(b) ; 24(c)
- 12 questions plus techniques, nécessitant une initiative et/ou une bonne synthèse des questions précédentes ou une rédaction plus délicate :
  8 ;10(b,c) ;11(b) ;12(a,b) ; 19(b) ; 20 ; 22(a) ; 23(b) ; 24(b) ; 25(b)
- 5 questions difficiles :
  10(d) ; 14(a,b) ; 15 ; 26

$\boxed{(1)}$ On a $I_d = R^T R$ donc $1 = \det(I_d) = \det(R^T R) = \det(R^T)\det(R) = \det(R)^2$. D'où $\det(R)^2 = 1$.

démonstration de cours

$\boxed{(2)}$ L'application $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^T B)$ est :

exemple de cours à connaître

1. *bilinéaire* par linéarité de la transposée et de la trace, et par bilinéarité du produit matriciel
   (il vaut peut-être mieux écrire la linéarité à gauche ou à droite pour convaincre votre correcteur que vous connaissez la définition de la bilinéarité ?)
2. *symétrique* car $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}\left((A^T B)^T\right) = \operatorname{tr}(B^T A) = \langle B, A\rangle$.
3. *définie positive* car $\langle A, A\rangle = \operatorname{tr}(A^T A) = \sum\limits_{i,j\in[\![1,d]\!]} A_{ij}^2 \geqslant 0$ et si $\langle A, A\rangle = 0$ alors $\sum\limits_{i,j\in[\![1,d]\!]} A_{ij}^2 = 0$ donc pour tout $(i,j) \in [\![1,d]\!]^2$, $A_{ij}^2 = 0$ donc $A = 0$.

$\boxed{3(a)}$ D'une part $\langle u, Av\rangle_{\mathbb{R}^d} = \sum\limits_{i=1}^d u_i [Av]_i = \sum\limits_{i=1}^d u_i \sum\limits_{j=1}^d A_{ij} v_j = \sum\limits_{i=1}^d \sum\limits_{j=1}^d u_i v_j A_{ij}$.

produit matriciel, question proche du cours

D'autre part, $\langle uv^T, A\rangle = \operatorname{tr}((uv^T)^T A) = \sum\limits_{i=1}^d \sum\limits_{j=1}^d (uv^T)_{i,j} A_{ij} = \sum\limits_{i=1}^d \sum\limits_{j=1}^d u_i v_j A_{ij} = \langle u, Av\rangle_{\mathbb{R}^d}$.

$\boxed{3(b)}$ $\operatorname{tr}(AB) = \sum\limits_{i=1}^d (AB)_{ii} = \sum\limits_{i=1}^d \sum\limits_{j=1}^d A_{ij} B_{ji} = \sum\limits_{j=1}^d \sum\limits_{i=1}^d B_{ji} A_{ij} = \sum\limits_{j=1}^d (BA)_{j,j} = \operatorname{tr}(BA)$.

démo de cours

$\boxed{3(c)}$ On a : $(B^T A)^T = A^T B$ donc $\langle A, BC\rangle = \operatorname{tr}(A^T BC) = \operatorname{tr}((B^T A)^T C) = \langle B^T A, C\rangle$.
De plus, d'après l'égalité précédente $\operatorname{tr}(A'B') = \operatorname{tr}(B'A')$ avec $A' = A^T B$ et $B' = C$, on a :
$\langle A, BC\rangle = \operatorname{tr}(A^T BC) = \operatorname{tr}(CA^T B) \underset{(*)}{=} \operatorname{tr}((AC^T)^T B) = \langle AC^T, B\rangle$, $\quad (*)$ car $(AC^T)^T = CA^T$.

question élémentaire si l'on sait que $(EF)^T = F^T E^T$

$\boxed{4(a)}$ On a : $R_{i,i}^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^d R_{k,i}^2 = \|C_i\|^2 = 1$ en notant C_i la i-ème colonne de R, C_i est de norme un car les colonnes de R forment une BON de $\mathbb{R}^d$ pour le produit scalaire canonique.

question de cours

Autre rédaction : $R_{i,i}^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^d R_{k,i}^2 = (R^T R)_{ii} = (I_d)_{ii} = 1$.

$\boxed{4(b)}$ On utilise que D est une matrice diagonale avec $D_{ii} = \alpha_i \geqslant 0$ et la question précédente :

$$\langle D, R\rangle = \operatorname{tr}(D^T R) = \sum_{i=1}^d (D^T R)_{ii} = \sum_{i=1}^d \underbrace{D_{ii}}_{\alpha_i} R_{ii} \leqslant \sum_{i=1}^d \underbrace{|\alpha_i|}_{=\alpha_i} \underbrace{|R_{ii}|}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{i=1}^d \alpha_i = \operatorname{tr}(D)$$

$\boxed{5(a)}$ Notons $x = a - b$:

cours $|Rx| = |x|$ pour R orthogonale

$|\phi_g(a) - \phi_g(b)| = |Ra + \tau - Rb - \tau| = |R(a-b)| = |Rx| = \sqrt{(Rx)^T Rx} = \sqrt{x^T R^T Rx} = \sqrt{x^T I_d x} = |x|$.

$\boxed{5(b)}$ Soit $g, g' \in \operatorname{Dep}(\mathbb{R}^d)$. On note $g = (\tau, R)$ et $g' = (\tau', R')$.

Supposons $\phi_g = \phi_{g'}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $Rx + \tau = R'x + \tau'$, en particulier pour $x = 0$, $\tau = \tau'$.

on peut choisir x

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $Rx = R'x$ donc les applications linéaires $x \mapsto Rx$ et $x \mapsto R'x$ sont égales donc leurs matrices associées dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$ sont égales : $R = R'$. D'où $g = g'$.

question clé qui va souvent servir dans les questions suivantes pour l'unicité

La réciproque $g = g' \Rightarrow \phi_g = \phi_{g'}$ est immédiate.

$\boxed{5(c)}$ *Existence* : on pose $e = (0, I_d)$. On a alors $\phi_e(x) = I_d x + 0 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

on devinait e sans trop de difficultés

Unicité : soit $e' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\phi_{e'}$ est l'identité de $\mathbb{R}^d$. Alors $\phi_e = \phi_{e'}$ donc d'après la question précédente $e = e'$.

$\boxed{6(a)}$ *Existence* : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\phi_{g'} \circ \phi_g(x) = \phi_{g'}(Rx + \tau) = R'(Rx + \tau) + \tau' = R'Rx + R'\tau + \tau'$.

en écrivant les choses calmement, g'' apparaît naturellement

On pose $\tau'' = R'\tau + \tau'$ et $R'' = R'R$; on a $R'' \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ car R' et R sont dans $\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$. On pose $g'' = (\tau'', R'')$ et on a alors par le calcul ci-dessus, $\phi_{g'} \circ \phi_g = \phi_{g''}$.

Unicité : soit $h \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\phi_h = \phi_{g'} \circ \phi_g$ alors $\phi_h = \phi_{g''}$ et par la question (5b) $h = g''$.

$\boxed{6(b)}$ Soit g_1, g_2 et g_3 dans $\mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$. On a :

l'argument clé est l'associativité de la loi $\circ$

$\phi_{g_1(g_2g_3)} \underset{(6a)}{=} \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2g_3} \underset{(6a)}{=} \phi_{g_1} \circ (\phi_{g_2} \circ \phi_{g_3}) \underset{\text{associativité}}{=} (\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}) \circ \phi_{g_3} \underset{(6a)}{=} \phi_{g_1g_2} \circ \phi_{g_3} \underset{(6a)}{=} \phi_{(g_1g_2)g_3}$

donc par la question (5b), $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$.

$\boxed{7(a)}$ Attention ϕ_g n'est pas une application linéaire ! *Injectivité* : soit $a, b \in \mathbb{R}^d$ tel que $\phi_g(a) = \phi_g(b)$. Alors $Ra + \tau = Rb + \tau$ donc $Ra = Rb$ mais R est inversible ($\det(R) = 1 \neq 0$) donc $a = b$.

rédaction application bijective (cas général, ϕ_g n'est pas linéaire)

Remarque : on pouvait aussi utiliser 5a) : $|\phi_g(a) - \phi_g(b)| = |a - b|$.

Surjectivité : soit $y \in \mathbb{R}^d$. On cherche $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $y = \phi_g(x) = Rx + \tau$. Il suffit de poser $x = R^{-1}(y - \tau)$.

Remarque : on pouvait aussi rédiger par équivalence ; pour $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$y = \phi_g(x) \Leftrightarrow y = Rx + \tau \Leftrightarrow x = R^{-1}(y - \tau)$.

$\boxed{7(b)}$ *Existence* : on pose $g' = (\tau', R')$ avec $\tau' = -R^{-1}\tau$ et $R' = R^{-1}$.

c'est l'expression de g" de la question 6a) qui permet de trouver g' et τ'

On vérifie (même calcul qu'à la question 6a) que : $\phi_{g'} \circ \phi_g = \phi_e$ (rappelons ici que ϕ_e est l'identité de $\mathbb{R}^d$) donc en composant à droite par ϕ_g^{-1} on obtient $\phi_{g'} = \phi_e \circ \phi_g^{-1} = \phi_g^{-1}$.

Unicité : s'il existe g'' tel que $\phi_{g''} = \phi_g^{-1} = \phi_{g'}$ alors $g'' = g'$ par la question (5b).

$\boxed{7(c)}$ On a $\phi_{ge} \underset{6a}{=} \phi_g \circ \phi_e = \phi_g$ donc (5b) $ge = g$. De même $eg = g$.

De plus, $\phi_{gg^{-1}} \underset{6a}{=} \phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = \phi_g \circ \phi_g^{-1} = \phi_e$ par définition de ϕ_g^{-1}, d'où par 5b, $gg^{-1} = e$.

On montre de même $g^{-1}g = e$.

$\boxed{(8)}$ Supposons que pour tout $g, g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, $gg' = g'g$ alors d'après 6(a), $\phi_g \circ \phi_{g'} = \phi_{g'} \circ \phi_g$ et en reprenant l'expression de gg' obtenue en 6(a) : $R'\tau + \tau' = R\tau' + \tau$ et $RR' = R'R$ pour tout $R, R' \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ et tout $\tau, \tau' \in \mathbb{R}^d$;

en particulier pour $\tau = \tau'$: pour tout $R, R' \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ et tout $\tau \in \mathbb{R}^d$, $R'\tau = R\tau$ d'où $R' = R$.

Ainsi, pour tout $R, R' \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$, $R' = R$, donc $\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ est réduit à un élément : $\mathcal{SO}_d(\mathbb{R}) = \{I_d\}$; on en déduit $d = 1$ (par l'absurde si $d \geqslant 2$, en notant $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice diagonale par blocs : $\begin{pmatrix} R_2 & (0) \\ (0) & I_{d-2} \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ et elle est différente de I_d)

$\boxed{9(a)}$ Soit $g, g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, $z \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$.

on utilise la définition de $g \cdot z$, la seule difficulté est d'écrire des égalités homogènes

$g \cdot (g' \cdot z) = g \cdot \left((\phi_{g'}(z_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}\right) = (\phi_g \circ \phi_{g'}(z_i))_{1 \leqslant i \leqslant n} \underset{6a}{=} (\phi_{gg'}(z_i))_{1 \leqslant i \leqslant n} = (gg') \cdot z$

$\boxed{9(b)}$ Soit $x, y \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$. Supposons $x = g \cdot y$. D'après 7c, $g^{-1}g = e$ donc d'après la question précédente, $g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot y) = (g^{-1}g) \cdot y = e \cdot y = (\phi_e(y_i))_{1 \leqslant i \leqslant n} = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = y$.

conséquence la question précédente et 7c)

$\boxed{10(a)}$ Soit $x, y \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$. $\|g \cdot y - g \cdot x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\phi_g(y_i) - \phi_g(x_i)|^2 \underset{5a}{=} \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^2 = \|y - x\|^2$.

$\boxed{10(b)}$ Pour tout $g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, $\|y - g \cdot x\| = \|g \cdot (g^{-1} \cdot y) - g \cdot x\| = \|g^{-1} \cdot y - x\| = \|x - g^{-1} \cdot y\| \geqslant \delta(y, x)$ donc :

rédaction classique avec les bornes inf : on utilise un passage à l'inf pour obtenir une inégalité. Pour obtenir une égalité avec une borne inf, on établit deux inégalités

$$\forall g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d), \quad \|y - g \cdot x\| \geqslant \delta(y, x)$$

par passage à la borne inférieure sur $g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on en déduit (la borne inf est le plus grand des minorants) :

$$\delta(x, y) \geqslant \delta(y, x)$$

On obtient de même par symétrie des rôles de x et y, $\delta(y, x) \leqslant \delta(x, y)$ donc $\delta(x, y) = \delta(y, x)$.

$\boxed{10(c)}$ On applique l'inégalité triangulaire pour la norme $\| \cdot \|$ (si l'on admet qu'il s'agit bien d'une norme, ce que l'énoncé semble faire) :

procédé ultra classique, faire apparaître $(gg') \cdot y$ par +/-

$$\|z - g\cdot x\| = \|z - (gg')\cdot y + (gg')\cdot y - g\cdot x\| \leqslant \|z-(gg')\cdot y\| + \|\underbrace{(gg')\cdot y - g\cdot x}_{=\|g'\cdot y - x\|}\| \quad \text{par 9(a) et 10(a)}$$

$\boxed{10(d)}$ On a pour tout $g, g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, $\delta(x,z) \leqslant \|z - g\cdot x\| \leqslant \|z - (gg')\cdot y\| + \|g'\cdot y - x\|$ donc $\delta(x,z) - \|g'\cdot y - x\| \leqslant \|z-(gg')\cdot y\|$ donc par passage à la borne inférieure sur g :

question difficile qui nécessite une bonne agilité dans la manipulation des bornes inf

$$(1) \qquad \delta(x,z) - \|g'\cdot y - x\| \leqslant \inf_g \|z - (gg')\cdot y\| = \inf_g \|z - g\cdot(g'\cdot y)\| = \delta(g'\cdot y, z)$$

De plus en écrivant $h = hg'^{-1}g' = h'g'$ avec $h' = hg'^{-1}$ (c'est ici le point astucieux de cette question)

point clé de la solution : on a l'égalité $\delta(g'\cdot y, z) = \delta(y,z)$ mais seule l'inégalité $\delta(g'\cdot y,z) \leqslant \delta(y,z)$ est utile pour obtenir l'inégalité

$$\forall h \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d), \quad \|z - h\cdot y\| = \|z - h'\cdot(g'\cdot y)\| \geqslant \delta(g'\cdot y, z) \quad \text{par définition de } \delta(g'\cdot y, z)$$

donc par passage à la borne inférieure sur h, $\inf_h \|z - h\cdot y\| \geqslant \delta(g'\cdot y, z)$ soit $\delta(y,z) \geqslant \delta(g'\cdot y, z)$.

Donc en reprenant l'inégalité (1) :

$$\delta(x,z) - \|g'\cdot y - x\| \leqslant \delta(g'\cdot y, z) \leqslant \delta(y,z) \quad \text{d'où} \quad \delta(x,z) - \delta(y,z) \leqslant \|g'\cdot y - x\| \;\; (2)$$

Donc par passage à la borne inférieure sur g' dans l'inégalité (2) :

$$\delta(x,z) - \delta(y,z) \leqslant \inf_{g'\in\mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)} \|g'\cdot y - x\| = \inf_{g'\in\mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)} \|x - g'\cdot y\| \overset{10b)}{=} \delta(y,x) = \delta(x,y)$$

donc

$$\delta(x,z) \leqslant \delta(x,y) + \delta(y,z)$$

$\boxed{11(a)}$ Supposons $c(x)\cap c(y)$ non vide : il existe $z \in c(x)\cap c(y)$: il existe $g_x, g_y \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $z = g_x\cdot x$ et $z = g_y \cdot y$.

traduction de $c(x)\cap c(y)$ non vide

Soit $x' \in c(x)$. Il existe $g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $x' = g'\cdot x$ or $x = g_x^{-1}\cdot z$ d'après 9b donc

si l'on traduit bien $x' \in c(x)$ et $x' \in c(y)$, il n'y avait pas de difficulté particulière ; il fallait bien comprendre la définition de $c(x)$

$$x' = g'\cdot x = g'\cdot(g_x^{-1}\cdot z) = (g'g_x^{-1})\cdot z = \underbrace{(g'g_x^{-1}g_y)}_{\in\mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)}\cdot y \quad \text{donc } x' \in c(y)$$

Nous avons montré $c(x)\subset c(y)$ et de même par symétrie des rôles de x et y, on montre $c(y)\subset c(x)$ donc $c(x) = c(y)$.

$\boxed{11(b)}$ Supposons $c(x) = c(y)$. On a $y = e\cdot y$ donc $y \in c(y) = c(x)$ donc il existe $g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, $y = g'\cdot x$ d'où $\|y - g'\cdot x\| = 0$ et par conséquent,

$$0 \leqslant \delta(x,y) = \inf_{g\in\mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)} \|y - g\cdot x\| \leqslant \|y - g'\cdot x\| = 0 \quad \text{donc } \delta(x,y) = 0$$

$\boxed{12(a)}$ Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

procédé classique pour faire apparaître la quantité $y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x})$

$$\begin{aligned}|y_i - (Rx_i + \tau)|^2 &= |y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x}) + \overline{y} - R\overline{x} - \tau|^2 \\ &= |y_i - \overline{y} - R(x_i-\overline{x})|^2 + |\overline{y} - R\overline{x} - \tau|^2 + 2\left\langle y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x}), \overline{y} - R\overline{x} - \tau\right\rangle_{\mathbb{R}^d}\end{aligned}$$

On somme ces égalités pour $i = 1$ à n :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |y_i - (Rx_i+\tau)|^2 = \sum_{i=1}^n |y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x})|^2 + \sum_{i=1}^n |\overline{y} - R\overline{x} - \tau|^2 \\ + 2\sum_{i=1}^n \left\langle y_i - \overline{y} - R(x_i-\overline{x}), \overline{y} - R\overline{x} - \tau\right\rangle_{\mathbb{R}^d}\end{aligned}$$

Or par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x}), \overline{y} - R\overline{x} - \tau \rangle_{\mathbb{R}^d} &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x}) \right], \overline{y} - R\overline{x} - \tau \right\rangle_{\mathbb{R}^d} \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y}) - \sum_{i=1}^{n} R(x_i - \overline{x}) \ , \ \overline{y} - R\overline{x} - \tau \right\rangle_{\mathbb{R}^d} \\
&= \langle 0, \overline{y} - R\overline{x} - \tau \rangle_{\mathbb{R}^d} = 0 \quad \text{car} \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \overline{y} \right] = 0 \\ \text{et } \sum_{i=1}^{n} \left[R(x_i - \overline{x}) \right] = 0 \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

la clé de question est de remarquer que $\sum_{i=0}^{n} (y_i - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0$

$$J(\tau, R) = \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x}) \right|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left| \overline{y} - R\overline{x} - \tau \right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x}) \right|^2 + n \left| \overline{y} - R\overline{x} - \tau \right|^2$$

$\boxed{12(b)}$ Soit $R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, $J(\tau, R) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x}) \right|^2$ avec égalité si et seulement si $n \left| \overline{y} - R\overline{x} - \tau \right|^2 = 0$ c'est à dire $\tau = \overline{y} - R\overline{x}$.

très proche de la démonstration de cours $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$

Donc $\tau \mapsto J(\tau, R)$ possède un unique minimum atteint en $\tau(R) = \overline{y} - R\overline{x}$.

$\boxed{13(a)}$ L' application $M \mapsto M^T$ est linéaire donc $f_1 : M \mapsto (M^T, M)$ est linéaire sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de dimension finie donc g est continue ;

De plus, $f_2 : (A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2$ de dimension finie donc elle est continue

Donc $f = f_2 \circ f_1$ est continue par composée d'applications continues.

cours : application linéaire/bilinéaire sur un espace de dim. finie est continue

$\boxed{13(b)}$ On a

application directe du cours sur l'image réciproque d'un fermé, et l'intersection de deux fermés

$$\begin{aligned}
\mathcal{SO}_d(\mathbb{R}) &= \left\{ M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_d \text{ et } \det(M) = 1 \right\} \\
&= \left\{ M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid f(M) = I_d \right\} \bigcap \left\{ M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1 \right\}
\end{aligned}$$

- $\{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid f(M) = I_d\}$ est fermé car c'est l'image réciproque du singleton $\{I_d\}$ (partie fermée) par l'application continue f.

  Rédaction alternative en utilisant une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$:

  $\{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid f(M) = I_d\} = \{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid \|f(M) - I_d\| = 0\}$ est fermé car $M \mapsto \|f(M) - I_d\|$ est continue par somme et composée de applications continues (f, $\|\cdot\|$ sont continues)

- $\{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\} = \{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid \det(M) - 1 = 0\}$ est fermé car $M \mapsto \det(M) - 1$ est continue (car det est continue).

Donc par intersection d'ensembles fermés, $\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ est un fermé.

De plus pour tout $M \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$, $\|M\| = \sqrt{\operatorname{tr}(M^T M)} = \sqrt{\operatorname{tr}(I_d)} = \sqrt{d}$ donc $\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ est inclus dans la boule de centre O et de rayon $\sqrt{d}$, donc $\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ est borné.

$\boxed{14(a)}$ Pour tout $(\tau, R) \in \operatorname{Dep}(\mathbb{R}^d)$, $J(\tau(R), R) \leqslant J(\tau, R)$ d'après 12(b).

L'application $R \mapsto \tau(R)$ est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ car $R \mapsto R\overline{x}$ est linéaire sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de dimension finie.

il fallait penser au théorème des bornes atteintes pour une fonction continue sur un fermé borné

On en déduit (pas le courage de détailler mais par somme, composée de fonctions continues ; $z \mapsto |z|$ est continue car 1-lipschitzienne...), $K : R \mapsto J(\tau(R), R)$ est continue sur le fermé borné $\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ donc par le théorème des bornes atteintes, K possède un minimum : il existe $R_* \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ tel que pour tout $R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$, $K(R_*) \leqslant K(R)$ d'où :

$$J(\tau(R_*), R_*) \leqslant J(\tau(R), R) \leqslant J(\tau, R) \quad \text{pour tout } (\tau, R) \in \operatorname{Dep}(\mathbb{R}^d)$$

$\boxed{14(b)}$ Pour $x = (0)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $R \mapsto J(\tau(R), R) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - \tau(R)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y}|^2$ est une application constante ; donc pour tout $R' \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$, pour tout $(\tau, R) \in \operatorname{Dep}(\mathbb{R}^d)$:

on trouve un cas particulier où il n'y a pas unicité

$$J(\tau(R'), R') = J(\tau(R), R) \leqslant J(\tau, R)$$

Toutes les matrices $R' \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ vérifient dans ce cas l'inégalité de la question précédente ; il n'y a pas unicité de R' si $d \geqslant 2$ (si $d = 1$, $\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ ne contient qu'un élément (1))

$\boxed{(15)}$ On a par définition de δ puis la question 14(a) :

question difficile de fin de partie

$$\begin{aligned}\delta(x,y)^2 = \inf_{g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)} \|y - g \cdot x\|^2 &= \inf_{(\tau,R) \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)} J(\tau, R) \\ &\overset{14(a)}{=} \inf_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} J(\tau(R), R) \\ &= \inf_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x})|^2\end{aligned}$$

Pour $R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x})|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(|y_i - \overline{y}|^2 + |R(x_i - \overline{x})|^2 - 2\left\langle y_i - \overline{y}, R(x_i - \overline{x}) \right\rangle_{\mathbb{R}^d} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |R(x_i - \overline{x})|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \langle y_i - \overline{y}, R(x_i - \overline{x}) \rangle_{\mathbb{R}^d}\end{aligned}$$

Or $|R(x_i - \overline{x}|^2 = |x_i - \overline{x}|^2$ car $R \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ et donc $\sum\limits_{i=1}^{n} |R(x_i - \overline{x})|^2 = nV_n(x)$ donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x})|^2 &= nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \sum_{i=1}^{n} \langle y_i - \overline{y}, R(x_i - \overline{x}) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &= nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \sum_{i=1}^{n} \left\langle (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})^T, R \right\rangle \text{ d'après 3(a)} \\ &= nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \left\langle \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})^T, R \right\rangle \\ &= nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \langle Z(x,y), R \rangle \quad \text{avec } Z(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})^T\end{aligned}$$

On en déduit (détails ?) :

$$\delta(x,y)^2 = \inf_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x})|^2 = nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \sup_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x,y), R \rangle$$

$\boxed{(16)}$ $S^T = (Z^T Z)^T = Z^T (Z^T)^T = S$, S est une matrice symétrique réelle donc d'après le théorème spectral , il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ (pour le produit scalaire canonique) $(u_1, \cdots, u_d)$ constituée de vecteurs propres de S. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ les valeurs propres de S, qui sont réelles, donc on peut les ordonner par ordre décroissant : $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_d$. Reste à montrer que $\lambda_i > 0$.

question très classique

Il faut penser à considérer : $\langle Su_i, u_i \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_i \rangle = \lambda_i \langle u_i, u_i \rangle = \lambda_i$.

Donc $\lambda_i = \langle Su_i, u_i \rangle = \langle Z^T Z u_i, u_i \rangle = u_i^T Z^T Z u_i = \|Zu_i\|^2 > 0$ car $u_i \neq 0$ et Z inversible donc $Zu_i \neq 0$.

$\boxed{17(a)}$ On a :

$$\begin{aligned}\langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle Zu_i, Zu_j \rangle_{\mathbb{R}^d} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} u_i^T Z^T Z u_j &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} u_i^T S u_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} u_i^T \lambda_j u_j = \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} u_i^T u_j \overset{BON}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}\end{aligned}$$

car $(u_1, \cdots, u_d)$ est une BON de $\mathbb{R}^d$

Par conséquent $(v_1, \cdots, v_d)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}^d$ donc elle est libre ; de plus elle est constituée de $d = \dim(\mathbb{R}^d)$ vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}^d$.

$\boxed{17(b)}$ *Remarque* : je vais considérer le produit matriciel V^TZU plutôt que de considérer VDU^T car avec les notations par colonnes, la ième ligne de V^T est v_i^T, et la jème colonne de U est u_j.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,d]\!]$

$$(V^TZU)_{ij} = v_i^T(Zu_j) = v_i^T\sqrt{\lambda_j}v_j = \sqrt{\lambda_j}v_i^Tv_j \overset{BON}{=} \begin{cases} \sqrt{\lambda_j} & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{donc} \quad (V^TZU)_{ij} = D_{ij}$$

Donc $V^TZU = D$ et sachant que les matrices U et V sont orthogonales (leurs colonnes forment une BON de $\mathbb{R}^d$), $VV^T = UU^T = I_d$, $\quad Z = V(V^TZU)U^T = VDU^T$.

$\boxed{18}$ $S_1 = Z_1^TZ_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice est diagonale : la base canonique $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une BON constituée de vecteurs propres de S.

on suit la construction de U, V, D des questions précédentes

On pose alors $v_1 = \frac{1}{\sqrt{4}}Z_1u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_2$ et $v_2 = \frac{1}{\sqrt{1}}Z_1u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1$

puis $U_1 = I_2$, $V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

on a alors d'après 17(b) : $Z_1 = V_1D_1U_1^T$: $Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$S_2 = Z_2^TZ_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (même vecteurs que précédemment)

On pose $v_1 = \frac{1}{2}Z_2u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -u_2$ et $v_2 = Z_2u_2 = u_1$

puis $U_2 = I_2$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_2 = D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $Z_2 = V_2D_2U_2^T$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{19(a)}$ Soit $R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$. Les matrices V^T, R et U sont orthogonales donc $V^TRU \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$.

De plus, d'après 17(b), $\det(Z) = \det(V)\det(D)\det(U)$ donc

$$\det(V^TRU) = \det(V^T)\det(R)\det(U) = \frac{\det(Z)}{\det(D)}\det(R) > 0 \text{ car } \det(D) > 0,\ \det(Z) > 0 \text{ et } \det(R) > 0$$

Donc d'après (1) $\det(V^TRU) = 1$ et par conséquent, $V^TRU \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$.

$\boxed{19(b)}$ On a

même remarque qu'en 10(b) ; pour établir une égalité de borne sup, on démontre deux inégalités

$$\forall R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R}), \quad \langle Z, R\rangle = \langle VDU^T, R\rangle \underset{3(c)}{=} \langle D, V^TRU\rangle \leqslant \sup_{R' \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R'\rangle \ \text{ car } V^TRU \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$$

Donc par passage à la borne supérieure sur $R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$, $\sup_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R\rangle \leqslant \sup_{R' \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R'\rangle$.

De même ,

$$\forall R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R}), \quad \langle D, R\rangle = \langle V^TZU, R\rangle \underset{3(c)}{=} \langle Z, VRU^T\rangle \leqslant \sup_{R' \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R'\rangle \quad \text{car } VRU^T \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$$

Donc par passage à la borne supérieure $\sup_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R\rangle \leqslant \sup_{R' \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R'\rangle$ d'où

$$\sup_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R\rangle = \sup_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R\rangle$$

$\boxed{(20)}$ D'après la question précédente et 4(b), si $\det(Z) > 0$,

$\sup_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R\rangle$ est un maximum atteint en $R = I_d$ d'après 4(b)

$$\sup_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R\rangle = \sup_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R\rangle \overset{4(b)}{=} \operatorname{tr}(D) = \langle D, I_d\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i}$$

Puis en utilisant le résultat de la question 15, si $\det(Z(x,y) > 0)$, $Z(x,y)$ est inversible donc on peut appliquer les résultats des questions précédentes avec $Z \leftarrow Z(x,y)$:

$$\delta(x,y) = \sqrt{nV_n(x) + nV_n(y) - 2\sum_{i=1}^{d}\sqrt{\lambda_i}}$$

où $(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_d})$ sont les valeurs singulières de $Z(x,y)$.

$\boxed{21(a)}$ Soit λ une valeur propre réelle. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$ tel que $Rx = \lambda x$ alors $|Rx| = |\lambda x| = |\lambda||x|$ et $|x| \neq 0$ donc $|\lambda| = \frac{|Rx|}{|x|} = 1$ car R est orthogonale.

démonstration de cours

Rappelons pourquoi $|Rx| = |x|$: $|Rx|^2 = (Rx)^T Rx = x^T R^T Rx = x^T x = |x|^2$

$\boxed{21(b)}$ $\det(R + I_d) = \det(R + RR^T) = \det(R(I_d + R^T)) = \det(R)\det(I_d + R^T)$.

$\boxed{21(c)}$ Si $\det(R) = -1$, alors d'après la question précédente, en utilisant $\det(M) = \det(M^T)$ et la linéarité de la transposée :

$$\det(R+I_d) = -\det(I_d+R^T) = -\det\left((I_d + R^T)^T\right) = -\det\left(I_d^T + (R^T)^T\right) = -\det(I_d+R) = -\det(R+I_d)$$

donc $\det(R + I_d) = 0$.

$\boxed{22(a)}$ On a $\det(R) = -1$ donc d'après la question précédente $\det(R + I_d) = 0$ donc -1 est valeur propre de R donc il existe $u_d \in \mathbb{R}^d$ unitaire tel que $Ru_d = -u_d$.

cours : $\lambda \in \mathrm{Sp}(R)$ ssi $\det(R - \lambda I_d) = 0$ ssi $\chi_R(\lambda) = 0$

On pose $E_1 = \mathrm{Vect}(u_d)^\perp$ et on considère une base orthonormée de E_1, $(u_1, \cdots, u_{d-1})$; on a alors immédiatement $(u_1, \cdots, u_d)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$.

une fois u_d défini, on pose E_1 de sorte que $\mathrm{Vect}(u_d) \perp E_1$

De plus, pour tout $x \in E_1$, en remarquant que $Ru_d = -u_d$ entraîne $R^T u_d = -u_d$ car $R \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$:

$$u_d^T Rx = (R^T u_d)^T x = (-u_d)^T x = -u_d^T x = -\langle u_d, x\rangle_{\mathbb{R}^d} = 0 \text{ par définition de } E_1$$

$\boxed{22(b)}$ Pour tout $x \in E_1$, $\langle Rx, u_d\rangle_{\mathbb{R}^d} = u_d^T(Rx) = 0$ donc $Rx \in \mathrm{Vect}(u_d)^\perp = E_1$. Donc $R(E_1) \subset E_1$.

R est inversible donc $\dim(R(E_1)) = \dim(E_1)$; avec l'inclusion précédente, on en déduit $R(E_1) = E_1$.

$\boxed{23(a)}$ On a $U \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ car ses colonnes $u_1, \cdots, u_d$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ donc : $\langle S, R'\rangle = \langle U^T DU, U^T RU\rangle \underset{3c}{=} \langle DU, \underbrace{UU^T}_{=I_d} RU\rangle \underset{3c}{=} \langle D, RUU^T\rangle = \langle D, R\rangle$.

$\boxed{23(b)}$ On a $R' = U^T RU = U^{-1}RU$ avec U la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ à la base $(u_1, \cdots, u_d)$ donc R' est la matrice de $x \mapsto Rx$ dans la base $(u_1, \cdots, u_d)$; E_1 étant stable par R et $Ru_d = -u_d$, on en déduit que R' est de la forme : $R' = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & R_0 & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$R' \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ donc par produit matriciel par blocs :

$$I_d = R'^T R' = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & R_0^T & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & R_0 & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & R_0^T R_0 & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc } R_0^T R_0 = I_{d-1}$$

$\boxed{24(a)}$ En remarquant que S est une matrice symétrique, on a par produit matriciel par blocs :

$S^T R' = SR' = \begin{pmatrix} S_0 & \vdots \\ \cdots & S_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 & (0) \\ (0) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 R_0 & \vdots \\ \cdots & -S_{dd} \end{pmatrix}$. Donc par la question 23(a),

$$\langle D, R\rangle = \langle S, R'\rangle = \mathrm{tr}(S^T R') = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} S_0 R_0 & \vdots \\ \cdots & -S_{dd} \end{pmatrix} = \mathrm{tr}(S_0 R_0) - S_{dd}$$

$\boxed{24(b)}$ S_0 est symétrique réelle (car S l'est) donc d'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_{d-1}(\mathbb{R})$ et $D_0 \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R})$ diagonale tel que $S_0 = PD_0P^T = PD_0P^{-1}$.

th. spectral !

S_0 et D_0 sont semblables donc $\mathrm{tr}(S_0) = \mathrm{tr}(D_0)$.

On a en posant $W = P^T R_0 P$, $W \in \mathcal{O}_{d-1}(\mathbb{R})$ et en utilisant le résultat de la question 4(b) avec W et D_0 :

$$\mathrm{tr}(S_0 R_0) = \mathrm{tr}(P D_0 P^T R_0) = \mathrm{tr}(D_0 P^T R_0 P) = \langle D_0, W\rangle \underset{4(b)}{\leqslant} \mathrm{tr}(D_0) = \mathrm{tr}(S_0)$$

$\boxed{24(c)}$ On a $S = \begin{pmatrix} S_0 & \vdots \\ \cdots & S_{dd} \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(S_0) + S_{dd}$.

De plus $S = U^T D U = U^{-1} D U$ donc $\mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(D)$ d'où $\mathrm{tr}(S_0) + S_{dd} = \mathrm{tr}(D)$. Donc par 24(a,b) :

$$\langle D, R\rangle \underset{24(a)}{=} \mathrm{tr}(S_0 R_0) - S_{dd} \underset{24(b)}{\leqslant} \mathrm{tr}(S_0) - S_{dd} = \mathrm{tr}(D) - 2S_{dd}$$

$\boxed{25(a)}$ $S = U^T D U$ donc $S_{dd} = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \underbrace{(U^T)_{di}}_{=U_{id}} \underbrace{D_{ij}}_{=0 \text{ si } i\neq j} U_{jd} = \sum_{j=1}^{d} (U^T)_{dj} \underbrace{D_{jj}}_{\alpha_j} U_{jd} = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j U_{jd}^2$.

simple produit matriciel

$\boxed{25(b)}$ Les α_j étant classés par ordre décroissant :

$$S_{dd} = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j U_{jd}^2 \geqslant \sum_{j=1}^{d} \alpha_d U_{jd}^2 = \alpha_d \text{ car } U \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R}) : \sum_{j=1}^{d} U_{jd}^2 = 1$$

synthèse des questions précédentes ; en analysant l'inégalité demandée, on s'aperçoit qu'il suffit de montrer $S_{dd} \geqslant \alpha_d$

Donc en utilisant la question 24(c) :

$$\langle D, R\rangle \leqslant \mathrm{tr}(D) - 2S_{dd} \leqslant \mathrm{tr}(D) - 2\alpha_d = \left(\sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i\right) - \alpha_d$$

$\boxed{(26)}$ Il s'agit d'exprimer $\sup\limits_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x,y), R\rangle$. On notera $Z = Z(x,y)$ par commodité.

On reprend les notations des questions 16 et 17 : $D = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_d})$ et $Z = V D U^T$.

En reprenant les démonstrations des questions 19(a)(b) on montre dans le cas $\det(Z) < 0$ que pour $R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$, $R' = V^T R U \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ et $\det(R') < 0$ puis :

le point délicat était de penser à établir cette égalité

$$\sup_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R\rangle = \sup_{\substack{R \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R}) \\ \det(R) = -1}} \langle D, R\rangle$$

On en déduit avec la question précédente et $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$,

le sup est ici un maximum atteint en $R = \begin{pmatrix} I_{d-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\sup_{\substack{R \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R}) \\ \det(R) = -1}} \langle D, R\rangle = \left(\sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_i}\right) - \sqrt{\lambda_d} \text{ atteint pour } R = \begin{pmatrix} I_{d-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Conclusion

$$\delta(x,y) = \sqrt{n V_n(x) + n V_n(y) - 2\sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_i} + 2\sqrt{\lambda_d}}$$

- *Remarque : montrons en détails comme en 19(b)* $\sup\limits_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R\rangle = \sup\limits_{\substack{R \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R}) \\ \det(R) = -1}} \langle D, R\rangle$.

Pour $R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$, $R' = V^T R U \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ et $\det(R') = \det(V^T)\det(R)\det(U) = \frac{\det(Z)}{\det(D)} \det(R) < 0$ donc $\det(R') = -1$ (d'après question 1).

On a donc pour tout $R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$, $\langle Z, R\rangle = \langle D, V^T R U\rangle \leqslant \sup\limits_{\substack{R' \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R}) \\ \det(R') = -1}} \langle D, R'\rangle$ donc par passage à la borne supérieure $\sup\limits_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R\rangle \leqslant \sup\limits_{\substack{R' \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R}) \\ \det(R') = -1}} \langle D, R'\rangle$.

On montre de la même manière $\sup\limits_{\substack{R' \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R}) \\ \det(R') = -1}} \langle D, R'\rangle \leqslant \sup\limits_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R\rangle$.