CCMP — PSI — Mathématiques 2 — 2024 — corrigé

I. Une propriété des sommes de Riemann

$$\mathscr{D}_{a,b} = \left\{ f \in \mathcal{C}\big(]a,b[,\mathbb{R}\big) \text{ intégrable ; } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\}.$$

Q 1. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Sa restriction g à $]a,b[$ est alors évidemment continue et prolongeable par continuité en a et en b, donc $\displaystyle\int_a^b g$ est faussement impropre, convergente et égale à $\displaystyle\int_a^b f$. Enfin, d'après le théorème sur les sommes de Riemann, en notant $S_n(f)$ la somme de Riemann d'ordre n de f associée aux rectangles à gauche,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = S_n(f) - \frac{f(a)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - 0 = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 2. On a $a_k - b_{k+1} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2^{k+1}} - \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{2^{k+2}} = \dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{3}{2^{k+2}} \sim \dfrac{1}{k^2} > 0$ à partir d'un certain rang par croissances comparées. Il n'est pas très difficile de trouver le *certain rang* en question : on note $u_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ et $v_k = \dfrac{3}{2^{k+2}}$ et l'on calcule $\dfrac{u_3}{v_3} = \dfrac{8}{9} < 1$, $\dfrac{u_4}{v_4} = \dfrac{16}{15} > 1$ et $\dfrac{u_{k+1}}{v_{k+1}} \div \dfrac{u_k}{v_k} = \dfrac{2k}{k+2} \geqslant 1$ pour tout $k \geqslant 2$. Ainsi, $k_0 = 4$ convient et l'on a, pour tout $k > k_0$,

$$\cdots < a_{k+1} < b_{k+1} < a_k < b_k < a_{k-1} < b_{k-1} < \cdots < a_{k_0+1} < b_{k_0+1} < a_{k_0} < b_{k_0}.$$

Par construction, f est affine par morceaux, positive et nulle en dehors des intervalles $\left[\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2^{k+1}}, \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2^{k+1}}\right]$ avec $k \geqslant k_0 = 4$. Elle est aussi trivialement continue en tout point différent de a_k, $1/k$ et b_k, continue en a_k car $0 = \displaystyle\lim_{\substack{t\to a_k\\ t<a_k}} f(t) = \lim_{\substack{t\to a_k\\ t>a_k}} f(t) = k^2 \cdot 2^{k+1}(a_k - a_k) = 0$, de même en b_k et, enfin, en $1/k$ puisque les deux formules donnent la même valeur, soit $f\left(\dfrac{1}{k}\right) = k^2$.

La formule donnant l'aire d'un triangle et le fait que la restriction de f aux intervalles $[b_{k+1}, a_k]$ soit nulle pour $k \geqslant k_0$ donnent, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)\,\mathrm{d}t = k^2\,\frac{b_k - a_k}{2} = \frac{k^2}{2^{k+1}} \quad \& \quad \int_{b_{k+1}}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \therefore \qquad \int_{a_k}^{b_{k_0}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{m=k_0}^{k} \frac{m^2}{2^{m+1}},$$

par la relation de Chasles. Si l'on fait tendre k vers l'infini, la série converge clairement par exemple par croissances comparées, son terme général étant négligeable devant $\dfrac{1}{m^2}$ ou a^m pour $\dfrac{1}{2} < a < 1$. Par décroissance de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{b_{k_0}} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\lim a_k = 0$, il s'ensuit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{b_{k_0}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que l'on a $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{m=k_0}^{\infty} \frac{k^2}{2^{k+1}}$. Pourtant, $f \notin \mathscr{D}_{0,1}$ car la suite des sommes de Riemann diverge :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

On note h la fonction définie sur $]0,1[$ par $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ et φ celle définie sur le même domaine par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

Q 3. L'intégrabilité de φ est une question de cours : notons d'abord que φ se prolonge à $]0,1]$ en une fonction continue. De plus,

$$\int_x^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \big[2\sqrt{t}\big]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 2.$$

La limite étant finie, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et, φ étant positive, c'est équivalent à son intégrabilité sur $]0,1[$.

La fonction φ est décroissante. Il s'ensuit que

$$\forall n \geqslant 3,\ \forall k \in [\![1, n-1]\!] \colon \int_{k/n}^{(k+1)/n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \qquad \therefore$$

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \xleftarrow[n\to\infty]{} \int_{1/n}^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^{1-1/n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

par la relation de Chasles et la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Le théorème des gendarmes permet de conclure : $\varphi \in \mathscr{D}_{0,1}$. Notons que le raisonnement fait n'utilise *que* le caractère décroissant de φ et la convergence de l'intégrale.

Q 4. Posons $u(t) = t(1-t)$. Alors, $u'(t) = 1 - 2t$ s'annule en $1/2$ et u est croissante sur $[0, 1/2]$, puis décroissante sur $[1/2, 1]$. Comme $h = \varphi \circ u$, h est décroissante sur $[0, 1/2]$. Comme $\tilde{h}(t) \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\sim} \varphi(t)$, $\tilde{h}$ est intégrable sur $]0, 1/2]$ et l'on peut appliquer le raisonnement fait à la question précédente pour φ, qui montre que $\tilde{h} \in \mathscr{D}_{0,1/2}$.

Q 5. On observe que $h(1-t) = h(t)$. Le changement de variable $x = 1 - t$ donne alors $\displaystyle\int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^1 h(x)\,\mathrm{d}x$ avec convergence de la deuxième intégrable puisque l'on a montré à la question précédente que la première converge. Ainsi, h est intégrable sur $]0, 1[$ et $\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{1/2} \tilde{h}(t)\,\mathrm{d}t$.

Q 6. On utilise à nouveau la relation $h(1-t) = h(t)$. En découpant la somme,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1} h\left(\frac{k}{2n}\right) &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\left[h\left(\frac{k}{2n}\right) + h\left(\frac{2n-k}{2n}\right)\right] + \frac{1}{2n} h\left(\frac{n}{2n}\right) \\
&= \frac{2}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} \tilde{h}\left(k\frac{1/2}{n}\right) + \frac{h(1/2)}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{\tilde{h}\in\mathscr{D}_{0,1/2}} 2\int_0^{1/2} \tilde{h}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Q 7. Notons $\displaystyle\Xi_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{2n}\right)$. D'après la question 4, $\displaystyle\lim \Xi_n = \int_0^{1/2} \tilde{h}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{d}t$. Par décroissance de h sur $[0, 1/2]$ (à nouveau d'après 4), on a

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \leqslant \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+2}\right) = \frac{2n+2}{2n+1}\,\Xi_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{d}t \qquad \&$$

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \geqslant \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \frac{2n}{2n+1}\,\Xi_n + \frac{h(1/2)}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où $\displaystyle\lim \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{d}t$ par le théorème des gendarmes. Or,

$$\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} h\left(1 - \frac{k}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{2n+1-k}{2n+1}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \qquad \therefore$$

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{d}t \overset{(\mathbf{Q\ 5})}{=} \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 8. Les sommes de Riemann d'ordre impair (question 6) et d'ordre pair (question 7) convergent vers l'intégrale de h, donc $h \in \mathscr{D}_{0,1}$.

Q 9. On calcule $\displaystyle t(1-t) = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1 - (2t-1)^2}{4}$, d'où le changement de variable $u = 2t - 1$, qui donne

$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \big[\arcsin u\big]_{-1}^1 = \pi.$$

Q 10. La question se traite classiquement par une comparaison série-intégrale, mais on peut ici utiliser la question 3 :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{-1/2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n}.$$

Q 11. On n'utilise pas la question ci-dessus, mais les deux questions qui la précèdent.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{i}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbf{Q\ 8})} \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t \overset{(\mathbf{Q\ 9})}{=} \pi.$$

Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels appartenant à $]-1,+\infty[$ et de limite nulle.

Q 12. Comme $(\varepsilon_n)_n$ est de limite nulle, elle est bornée et admet donc une norme infinie. Par ailleurs, l'étude de monotonie faite à la question 4 assure que $\dfrac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. Alors, pour $1 < m < n$,

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{\|\varepsilon\|_\infty}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=m+1}^{n-1} \frac{\max\limits_{m<i<n} |\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \leqslant \frac{m\|\varepsilon\|_\infty}{\sqrt{n-1}} + \max_{m<i<n} |\varepsilon_i| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}.$$

Pour $m = m(n)$ une fonction de limite infinie négligeable par rapport à $\sqrt{n}$ (par exemple $m(n) = \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$ ou $m(n) = \lfloor \ln(n) \rfloor$), la question 11 et le théorème des gendarmes assurent que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} = 0$.

Q 13. On réduit l'expression entre crochet au même dénominateur, puis l'on utilise l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \left[\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - 1\right]\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_{n-i}|}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i \varepsilon_{n-i}|}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_n|}{\sqrt{i(n-i)}};$$

Dans un deuxième temps, on montre que les quatre sommes sont de limite nulle.

- Le changement de variable $j = n - i$ montre que les deux premières sommes sont égales et la question précédente, qu'elles tendent vers 0.
- La troisième somme est de limite nulle comme le montre la question 12 appliquée à la majoration

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i \varepsilon_{n-i}|}{\sqrt{i(n-i)}} \leqslant \|\varepsilon\|_\infty \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}}.$$

- Enfin,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_n|}{\sqrt{i(n-i)}} = |\varepsilon_n| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \sim \pi|\varepsilon_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

II. Une étude de marche aléatoire

Q 14. Par hypothèse, $X_n(\Omega) \subset \{-1, 1\}$. Si $\mathbf{P}(X_n = 1) = p$, alors $\mathbf{E}(X_n) = p - (1-p) = 2p - 1 = 0$, puisque X_n est centrée. Ainsi, $p = \dfrac{1}{2}$ et $X_n \sim \mathcal{U}(\{-1, 1\})$, donc $\dfrac{X_n + 1}{2} \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Q 15. Notons $U_n = \#\{i \in [\![1, 2n]\!]\,;\ X_i = 1\}$. Par définition de la loi binomiale, $U_n \sim \mathcal{B}(2n, 1/2)$ et

$$\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(U_i = i) = \binom{2i}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i} = \frac{1}{4^i}\binom{2i}{i}.$$

Q 16. Par définition, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ est une somme de n nombres impairs, donc de même parité que n. Ainsi, $\mathbf{P}(S_n = \ell) = 0$ pour tout ℓ de parité inverse de celle de n, donc si $\ell - n$ est impair. Posons $Y_i = \dfrac{X_i + 1}{2}$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i = \dfrac{S_n + n}{2} \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$ d'après la question 14. Si $\ell - n$ est pair,

$$\mathbf{P}(S_n = \ell) = \mathbf{P}\left(S'_n = \frac{\ell + n}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{\ell+n}{2}}.$$

Q 17. Posons $r_n = c_n - d_n$. Par hypothèse, $c_n \sim d_n$, donc $r_n = \mathfrak{o}(c_n)$. En vertu du théorème admis,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} d_k + \sum_{k=1}^{n} r_k = \sum_{k=1}^{n} d_k + \mathfrak{o}\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k\Big),$$

ce qui est équivalent à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} d_k$.

Q 18. Par définition, N_n compte le nombre d'indices $i \in [\![1, n]\!]$ tels que A_i soit réalisé. Autrement dit, $N_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\big(\mathbb{1}_{A_i}\big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) \overset{(\mathbf{Q\ 15})}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i}\binom{2i}{i}.$$

Q 19. D'après la formule de Stirling,

$$\frac{1}{4^i}\binom{2i}{i} \underset{i\to\infty}{\sim} \frac{1}{4^i}\left(\frac{2i}{\mathrm{e}}\right)^{2i}\left(\frac{\mathrm{e}}{i}\right)^{2i} \times \frac{\sqrt{4\pi i}}{2\pi i} = \frac{1}{\sqrt{\pi i}}.$$

En appliquant les deux questions précédentes, il vient

$$\mathbf{E}(N_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \overset{(\mathbf{Q\ 10})}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

Q 20. Introduisons comme suggéré les événements B_i :« l'entier i est un indice d'égalité ». Pour calculer $\mathbf{P}(B_i)$, on commence par noter que $\mathbf{P}(B_i) = 0$ pour tout i impair. On a aussi $\mathbf{P}(B_{2n}) = 1$ comme mentionné dans l'énoncé. Pour calculer $\mathbf{P}(B_{2i})$, il suffit de s'intéresser aux indices ayant amené au tirage d'une boule blanche, ce qui donne $\binom{2n}{n}$ possibilités distinctes. Parmi ces possibilités, les cas favorables correspondent aux tirages tels qu'en $2i$ tirages, on ait tiré exactement i boules blanches, soit $\binom{2i}{i}$ possibilités pour les i premiers tirages, complétées par les $\binom{2n-2i}{n-i}$ possibilités pour les tirages restant à effectuer, soit finalement, comme $M_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} \mathbb{1}_{B_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{B_{2i}}$,

$$\mathbf{E}(M_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_{2i}) = \binom{2n}{n}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \binom{2i}{i}\binom{2n-2i}{n-i}.$$

Q 21. On a montré à la question 19 que $\binom{2k}{k} \sim \dfrac{4^k}{\sqrt{\pi k}}$. On peut donc écrire $\binom{2k}{k} = \dfrac{4^k}{\sqrt{\pi k}}(1+\varepsilon_k)$ avec $\lim \varepsilon_k = 0$ et $\varepsilon_k > -1$, les coefficients binomiaux étant positifs. En reportant dans l'expression de $\mathbf{E}(M_n)$, il vient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(M_n) &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{4^i}{\sqrt{\pi i}} \times \frac{4^{n-i}}{\sqrt{\pi(n-i)}} \times \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} \times \frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} = 1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \left[\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - 1\right] = 1 + \sqrt{\pi n} + \mathfrak{o}\big(\sqrt{n}\big) \sim \sqrt{\pi n}\end{aligned}$$

en vertu des questions 11 et 13.