

## Un corrigé

# Partie I. Préliminaires

1.  $\mathbb{M}_n$  est vide si, et seulement si,  $R_u = 0$ . Pour la suite  $u = (k!)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathbb{M}_u = \emptyset$ .
2. Si  $R_u = 0$  alors  $\mathbb{M}_u = \emptyset \neq \{0_n\}$ . Si  $R_u > 0$ , alors la matrice diagonale  $D = \text{diag}\left(\frac{R_u}{2}, 0, \dots, 0\right)$  est dans  $\mathbb{M}_u$  et donc  $\mathbb{M}_u \neq \{0_n\}$ .
3. Si  $R_u = +\infty$ , alors  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $A \in \mathbb{M}_u$  et donc  $\mathbb{M}_u = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .  
Si  $\mathbb{M}_u = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , alors  $\mathbb{M}_u$  est un ensemble non vide et stable par toute combinaison linéaire, en particulier par l'addition.  
Si la propriété (iii) est vérifiée, alors il existe une matrice non nulle  $A \in \mathbb{M}_u$ . Par stabilité et par principe de récurrence, on a  $pA \in \mathbb{M}_u$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ . Donc pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varrho(pA) = p\varrho(A) < R_u$  ce qui montre par passage à la limite que  $R_u = +\infty$ .

Ainsi, les trois propriétés sont équivalentes. La suite  $\left(\frac{1}{k!}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  vérifie les trois propriétés.

4. Soit  $A \in \mathbb{M}_u(v)$  pour tout suite  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{C}$  vérifiant  $R_v > 0$ . En particulier,  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in \mathbb{M}_n(v_p)$  où  $v_p = \left(p^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ , donc  $\varrho(A) < R_{v_p} = \frac{1}{p}$ , donc nécessairement  $\varrho(A) = 0$ . Ainsi  $\text{Sp}(A) = \{0\}$  et par conséquent  $A$  est une matrice nilpotente.  
Si  $A$  est nilpotente, alors  $\text{Sp}(A) = \{0\}$  et donc  $\varrho(A) = 0$ , ce qui montre que  $A \in \mathbb{M}_u(v)$  pour tout suite  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{C}$  telle que  $R_v > 0$ .
5. On rappelle qu'une série entière  $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k z^k$  et sa série dérivée  $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k u_k z^{k-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k+1) u_{k+1} z^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k^{(1)} z^k$  ont même rayon de convergence. Ainsi  $D_{u^{(1)}} = D_u$ , la propriété en question découle ainsi par le principe de récurrence sur  $m \in \mathbb{N}$ .
6. Le rayon de convergence de la somme et le produit de Cauchy de deux séries entières  $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k z^k$  et  $\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k z^k$  est au moins égal à  $\min(R_u, R_v)$ . Ainsi, si  $A \in \mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v)$ , alors  $\varrho(A) < \min(R_u, R_v)$ . Donc nécessairement,  $\varrho(A) < R_{u+v}$  et  $\varrho(A) < R_{u*v}$ , c'est-à-dire  $A \in \mathbb{M}_n(u+v) \cap \mathbb{M}_n(u*v)$ . D'où :

$$\mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v) \subset \mathbb{M}_n(u+v) \cap \mathbb{M}_n(u*v).$$

7. Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  que  $A$  et  $B$  sont simultanément trigonalisables. Le résultat est vrai pour  $n = 1$ . Soit  $n \geq 1$ . Supposons que deux matrices d'ordre  $n$  qui commutent soient simultanément trigonalisables. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices d'ordre  $n+1$  telles que  $AB = BA$ .
  - $A$  et  $B$  ont au moins un vecteur propre en commun. En effet,  $A$  admet au moins une valeur propre  $\lambda$ . Soit  $E_\lambda$  le sous-espace propre de  $A$  associé à  $\lambda$ .  $A$  commute avec  $B$  et donc laisse stable  $E_\lambda$ . La restriction de  $B$  à  $E_\lambda$  admet donc une valeur propre et donc un vecteur propre. Ce vecteur est un vecteur propre commun à  $A$  et  $B$ .
  - Commençons à construire une base de trigonalisation simultanée de  $A$  et  $B$ . Soit  $X$  un vecteur propre commun à  $A$  et  $B$ . On complète la famille libre  $(X)$  en une base  $\mathcal{B} = (X, Y_1, \dots, Y_n)$  de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Dans la base  $\mathcal{B}$ , les matrices  $A$  et  $B$  sont donc semblables respectivement à  $M = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} \mu & (*) \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}$  où  $M_1$  et  $N_1$  sont de taille  $n$ .

Un calcul par blocs montre que  $M_1 N_1 = N_1 M_1$ . Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice inversible de taille  $n$  inversible  $P_1$  et deux matrices triangulaires de taille  $n$  supérieures  $T_1$  et  $T'_1$  telles que  $P_1^{-1} M_1 P_1 = T_1$  et  $P_1^{-1} N_1 P_1 = T'_1$ .

Soit  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$ .  $P$  est inversible de taille  $n + 1$  car  $\det P = \det P_1 \neq 0$  et un calcul par blocs montre que  $P^{-1} M P$  et  $P^{-1} N P$  sont triangulaires supérieures.  $P$  est donc la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à une base de trigonalisation simultanée de  $A$  et  $B$ .

• Donc si  $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  et  $\text{Sp}(B) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ , alors  $AB$  est semblable à une matrice de type

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 \mu_2 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $\text{Sp}(AB) = \{\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n\}$  et par conséquent

$$\varrho(AB) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda_i \mu_i| \leq \varrho(A) \varrho(B) < R_u^2 \leq R_u,$$

donc  $AB \in \mathbb{M}_n(u)$ .

## Partie II. Fonctions de matrices

8. D'après le théorème de Cayley-Hamilton le polynôme caractéristique  $\chi_A$  de  $A$  est un polynôme annulateur de  $A$  et non nul, donc  $\chi_A \in \mathcal{V}$ , d'où  $\mathcal{V} \neq \emptyset$ .
9. On pose  $I = \{ P \in \mathbf{C}[X] \mid P(A) = 0 \}$ . On voit que  $I$  est un idéal non nul ( $\chi_A \in I$ ) de  $\mathbf{C}[X]$ . L'anneau  $\mathbf{C}[X]$  étant principal, il existe un unique polynôme  $\varphi_A$ , unitaire, tel que  $\varphi_A(A) = 0$ . C'est le polynôme unitaire de plus bas degré annulant  $A$ .
10. Soit  $P$  un polynôme annulateur de  $A$ . La division euclidienne de  $P$  par  $\varphi_A$  donne  $P = Q\varphi_A + R$ , donc  $R = P - Q\varphi_A$ , donc  $R$  est un polynôme annulateur de degré inférieur à celui de  $\varphi_A$ , donc  $R = 0$  et par suite  $\varphi_A$  divise  $P$ .
11. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ , il existe donc un vecteur  $X$  non nul tel que  $AX = \lambda X$ . Une récurrence immédiate prouve que pour tout entier  $k$  strictement positif,  $A^k = \lambda^k X$ , d'où on déduit que pour tout polynôme à coefficients dans  $\mathbf{C}$ , on a  $P(A)X = P(\lambda)X$ .

En appliquant ce résultat avec le polynôme minimal, on obtient  $0 = \varphi_A(A)X = \varphi_A(\lambda)X$ . Comme le vecteur  $X$  est non nul on en déduit que  $\varphi_A(\lambda) = 0$ .

Réciproquement, soit  $\lambda$  une racine de  $\varphi_A$ . Le polynôme  $X - \lambda$  divise  $\varphi_A$  donc, cela prouve l'existence d'un polynôme  $Q$  tel que  $\varphi_A(X) = (X - \lambda)Q(X)$ . Alors on a  $(A - \lambda \mathbf{I}_n)Q(A) = 0$ . Comme le degré de  $Q$  est strictement inférieur au degré de  $\varphi_A$ ,  $Q$  n'est pas un polynôme annulateur de  $A$ . Il en résulte que  $Q(A)$  n'est pas nul et que  $A - \lambda \mathbf{I}_n$  n'est pas inversible et par conséquent  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , c'est-à-dire une racine de  $\chi_A$ .

12. On reprend la même démonstration avec  $I = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(A) = 0 \}$  (remplacer  $\mathbf{C}$  par  $\mathbf{R}$ ), en remarquant que, par définition, le polynôme caractéristique  $\chi_A$  de  $A$  est un polynôme à coefficients réels et dans  $I$ .
13. On peut vérifier que l'application  $T$  est linéaire. Comme  $\dim \mathbf{C}_{m-1}[X] = \dim \mathbf{C}^m$ , alors  $T$  est un isomorphisme est équivalent à  $T$  surjective ou injective. Donc il suffit de montrer que  $T$  est injective. Soit donc  $P \in \mathbf{C}_{m-1}[X]$  tel que  $T(P) = 0$ , alors

$$\forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, m_i - 1 \rrbracket, P^{(k)}(\lambda_i) = 0.$$

Donc  $\forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ ,  $\lambda_i$  est une racine de  $P$ , d'ordre de multiplicité au moins égal à  $m_i$ , on en déduit que le polynôme  $(X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \dots (X - \lambda_l)^{m_l}$ , c'est-à-dire  $\varphi_A$ , divise  $P$  et comme ce dernier est de degré  $m - 1$  et  $P$  de degré inférieur ou égal à  $m - 1$ , alors  $P$  est nul. D'où l'injectivité de  $T$ .

14. Par division euclidienne de  $P$  par  $\varphi_A$  il existe  $Q$  et  $R$  des polynômes tels que  $P = Q\varphi_A + R$  avec  $R \in \mathbf{C}_{m-1}[X]$ . Comme  $\varphi_A(A) = 0$ , alors  $P(A) = R(A)$ . D'autre part, pour chaque  $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ ,  $\lambda_i$  est une racine d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à  $m_i$ , d'où :

$$\forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, m_i - 1 \rrbracket, P^{(k)}(\lambda_i) = R^{(k)}(\lambda_i).$$

Ainsi, par unicité de  $Q$  ( la question 13. ),  $u(A) = R(A)$ .

15. Dans ce cas  $\varphi_{\alpha I_n} = X - \alpha$ , donc le reste de la division euclidienne par  $\varphi_{\alpha I_n}$  est un polynôme constant. Donc il existe une constante  $c \in \mathbf{C}$  telle que  $u(\alpha I_n) = c I_n$ , avec  $c = U(\alpha)$ . D'où :

$$u(\alpha I_n) = U(\alpha) I_n.$$

16. Puisque  $\alpha \neq \beta$ , alors  $\varphi_A = (X - \alpha)(X - \beta)$ . Donc le reste de la division euclidienne par  $\varphi_A$  est de la forme  $aX + b$ . D'où :

$$u(A) = aA + bI_n$$

Les deux constantes  $a$  et  $b$  sont solutions du système d'équations  $\begin{cases} a\alpha + b = U(\alpha) \\ a\beta + b = U(\beta) \end{cases}$ , donc  $a = \frac{U(\alpha) - U(\beta)}{\alpha - \beta}$  et  $b = U(\alpha) - a\alpha = U(\alpha) - \frac{U(\alpha) - U(\beta)}{\alpha - \beta}\alpha = \frac{U(\beta)\alpha - U(\alpha)\beta}{\alpha - \beta}$ . Ainsi :

$$u(A) = \frac{U(\alpha) - U(\beta)}{\alpha - \beta}A + \frac{U(\beta)\alpha - U(\alpha)\beta}{\alpha - \beta}I_n = \begin{pmatrix} U(\alpha) & \frac{U(\beta)\alpha - U(\alpha)\beta}{\alpha - \beta} \\ 0 & U(\beta) \end{pmatrix}$$

17. (a) On sait qu'il existe des polynômes  $Q_1$  et  $Q_2$  tels que  $u(A) = Q_1(A)$  et  $u(B) = Q_2(B)$ . Le polynôme  $R = Q_1Q_2$  répond à la question.  
(b) D'après la question précédente il existe  $R \in \mathbf{C}[X]$  tel que  $u(AB) = R(AB)$  et  $u(BA) = R(BA)$ . Posons

$$R = \sum_{i=0}^d a_i X^i, \text{ donc}$$

$$Au(BA) = A \sum_{i=0}^d a_i (BA)^i = \sum_{i=0}^d a_i (AB)^i A = u(AB)A.$$

18. Comme  $A \in \mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v)$ , alors  $A \in \mathbb{M}_n(u * v)$  ( d'après la question 6. ). D'autre part, pour tout  $t \in \mathbf{R}$  tel que  $|t| < \min(R_u, R_v)$ , on note  $U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k$ ,  $V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k t^k$  et  $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k t^k$  où  $w_k = \sum_{j=0}^k u_j v_{k-j}$ . On sait que  $W = UV$  et qu'il existe des polynômes  $R_1, R_2$  et  $R$  tels que

$$(u * v)(A) = R(A)$$

où  $\forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0, m_i - 1 \rrbracket$ ,  $R_1^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i)$ ,  $R_2^{(k)}(\lambda_i) = V^{(k)}(\lambda_i)$  et  $R^{(k)}(\lambda_i) = W^{(k)}(\lambda_i)$ . Mais, pour tout  $\forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0, m_i - 1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} W^{(k)}(\lambda_i) &= \sum_{j=0}^k \mathfrak{C}_k^j U^{(j)}(\lambda_i) V^{(k-j)}(\lambda_i) \\ &= \sum_{j=0}^k \mathfrak{C}_k^j R_1^{(j)}(t) R_2^{(k-j)}(\lambda_i) \\ &= (R_1 R_2)^{(k)}(\lambda_i). \end{aligned}$$

Donc le polynôme  $R_1 R_2$  vérifie les conditions de la question 14., d'où :

$$(u * v)(A) = (R_1 R_2)(A) = R_1(A) R_2(A) = u(A) v(A).$$

## Partie III. Cas de matrices diagonalisables

19. Puisque  $A$  est diagonalisable, alors le polynôme minimal est à racines simples, donc

$$\varphi_A(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_l).$$

20. (a) Les polynômes  $Q_k^A$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$  forment une base de  $\mathbf{C}_{l-1}[X]$ . En effet, puisqu'il s'agit d'une famille à  $l$  éléments il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient donc  $a_1, a_2, \dots, a_l \in \mathbf{C}$  tels que  $\sum_{k=1}^l a_k Q_k^A(X) = 0$ , ce qui

$$\text{entraîne } \forall k \in \llbracket 1, l \rrbracket, \sum_{k=1}^l a_k Q_k(\lambda_j) = \sum_{k=1}^l a_k \delta_{kj} = 0, \text{ d'où } a_k = 0.$$

Maintenant soit  $R \in \mathbf{C}_{l-1}[X]$  tel que  $u(A) = R(A)$ , donc il existe des constantes  $a_1, a_2, \dots, a_l$  telles que  $R(X) = \sum_{k=1}^l a_k Q_k^A(X)$  avec  $a_k = R(\lambda_k) = U(\lambda_k)$ . D'où :

$$u(A) = R(A) = \sum_{k=1}^l U(\lambda_k) Q_k^A(A).$$

- (b) Puisque  $A$  est diagonalisable, on a  $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{k=1}^l \ker(A - \lambda_k \mathbf{I}_n)$ . Posons  $p_i = Q_i^A(A)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ . D'après

$$\text{l'égalité } 1 = \sum_{k=1}^l Q_k^A(X) \text{ on a } \mathbf{I}_n = \sum_{k=1}^l p_k \text{ et pour } i \neq j, \text{ on a :}$$

$$p_i p_j = Q_i^A(A) Q_j^A(A) = 0$$

car  $Q_i^A Q_j^A$  est un multiple de  $\varphi_A$ . L'égalité  $\mathbf{I}_n = \sum_{k=1}^l p_k$  entraîne, en multipliant par  $p_i = \sum_{k=1}^l p_k p_j = p_i^2$ . Donc  $p_i$  est un projecteur.

Précisons maintenant le noyau et l'image de  $p_i$ . On a  $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{k=1}^l \text{Im } p_k$ . Si  $x \in \text{Im } p_i$ , alors il existe  $y \in \mathbf{C}^n$  tel que  $x = p_i(y)$ , d'où :

$$(A - \lambda_i \mathbf{I}_n)(x) = (A - \lambda_i \mathbf{I}_n) Q_i^A(A)(x) = 0$$

car  $(X - \lambda_i) Q_i^A(X)$  est un multiple de  $\varphi_A$ , donc  $\text{Im } p_i \subset \ker(A - \lambda_i \mathbf{I}_n)$ . Dans ces conditions les deux décompositions  $\bigoplus_{i=1}^l \text{Im } p_i = \bigoplus_{i=1}^l \ker(A - \lambda_i \mathbf{I}_n)$  de  $\mathbf{C}^n$  coïncident nécessairement. D'où  $\text{Im } p_i = \ker(A - \lambda_i \mathbf{I}_n)$ , ainsi

$Q_i^A$  est la projection sur  $\ker(A - \lambda_i \mathbf{I}_n)$  parallèlement à  $\bigoplus_{k=1, k \neq i}^l \ker(A - \lambda_k \mathbf{I}_n)$ .

(c) C'est déjà démontré dans la question précédente.

21. On remarque que  $A$  et  $BAB^{-1}$  ont même polynôme minimal ( tout polynôme annulateur  $A$  est un annulateur de  $BAB^{-1}$  et inversement ), d'où  $Q_k^{BAB^{-1}} = Q_k^A$ . Ainsi,

$$u(BAB^{-1}) = \sum_{k=1}^l U(\lambda_k) Q_k^{BAB^{-1}}(BAB^{-1}) = \sum_{k=1}^l U(\lambda_k) Q_k^A(BAB^{-1}) = B \sum_{k=1}^l U(\lambda_k) Q_k^A(A) B^{-1} = Bu(A) B^{-1}.$$

22. (a) On a  $u(D) = \sum_{k=1}^l U(\lambda_k) Q_k^D(D)$ . Comme  $D$  est une matrice diagonale, il est de même de  $Q_k^D(D)$ , donc  $u(D)$  est une matrice diagonale. De plus

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, [u(D)]_{ii} = \sum_{k=1}^l U(\lambda_k) Q_k^D([D]_{ii})$$

- (b) On a  $u(A) = Su(D)S^{-1} = S \text{diag}(u(D)_{11}, u(D)_{22}, \dots, u(D)_{nn}) S^{-1}$ .

## Partie IV : Application à des cas particuliers

23. (a)  $H$  est une matrice nilpotente d'indice  $n$ , donc  $\varphi_H(X) = X^n$ .  
 (b) On a  $(A - \alpha \mathbf{I}_n)^n = H^n = 0$  et  $(A - \alpha \mathbf{I}_n)^{n-1} = H^{n-1} \neq 0$ , donc le reste de la division euclidienne par le polynôme minimal  $\varphi_A$  est un polynôme  $R$  de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ . D'où  $u(A) = R(A)$  avec  $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, R^{(k)}(\alpha) = U^{(k)}(\alpha)$ .

La formule de Taylor polynômiale pour  $R$  s'écrit  $P(X + \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R^{(k)}(\alpha)}{k!} X^k$ , d'où :

$$R(A) = R(H + \alpha \mathbf{I}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R^{(k)}(\alpha)}{k!} H^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^{(k)}(\alpha)}{k!} H^k$$

D'où

$$u(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U^{(k)}(\alpha)}{k!} H^k.$$

D'autre part, on peut vérifier par récurrence que  $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ ,

$$H^k = \begin{pmatrix} 0_{n-k,k} & \mathbf{I}_{n-k} \\ 0_{k,k} & 0_{k,n-k} \end{pmatrix}$$

D'où

$$u(A) = \begin{pmatrix} U(\alpha) & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} & \frac{U^{(2)}(\alpha)}{2!} & \cdots & \frac{U^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} \\ 0 & U(\alpha) & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{U^{(2)}(\alpha)}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & U(\alpha) \end{pmatrix}$$

24. (a) Pour tout  $1 \leq j \leq n$ , la colonne  $C_j$  de  $G$  peut s'écrire  $C_j = z_j Y$  avec  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , donc  $\text{rg}(G) \leq 1$ . Comme  $Y$  et  $Z$  sont non nuls, alors il existe  $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $C_{j_0} = z_{j_0} Y \neq 0$  et par conséquent  $\text{rg}(G) = 1$ . De plus  $Y$  engendre  $\text{Im } G$ , d'où  $\text{Im } G = \text{Vect}(Y)$ .  
 (b) On a  $G^2 = Y({}^t Z Y)^t Z$  avec  $\lambda = {}^t Z Y$  un scalaire, donc  $G^2 = \lambda G$ , ainsi  $X(X - \lambda)$  est un polynôme annulateur de  $G$ , donc  $\text{Sp}(G) \subset \{0, {}^t Z Y\}$ . Comme  $\text{rg } G = 1$ ,  $0$  est une valeur propre de  $G$  et comme  $G^2 \neq 0$ , alors  $\lambda$  est nécessairement une valeur propre de  $G$ . D'où

$$\text{Sp}(G) = \{0, {}^t Z Y\}.$$

- (c) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz,  $|{}^t Z Y|^2 \leq ({}^t Y Y)({}^t Z Z) = 1$ , d'où  $\varrho(A) = |{}^t Z Y| \leq 1 < R_u$ , donc  $G \in \mathbb{M}_n(u)$ .  
 (d) Dans ce cas  $\text{Sp}(G) = \{0, {}^t Z Y\}$  et donc  $\varphi_G(X) = X(X - \lambda)$ .  
 (e) D'après ce qui précède il existe un polynôme  $P(X) = a + bX$  de degré inférieur ou égal à 1 tel que  $u(G) = a\mathbf{I}_n + bG$  avec  $a = P(0) = U(0)$  et  $P(\lambda) = a + b\lambda = U(\lambda)$  ce qui donne  $b = \frac{U(\lambda) - U(0)}{\lambda}$ , d'où :

$$u(G) = U(0)\mathbf{I}_n + \frac{u({}^t Z Y) - U(0)}{{}^t Z Y} G.$$

- (f) Toujours  $u(G)$  est de la forme  $a\mathbf{I}_n + bG$  avec  $a = U(0)$  et  $b = U^{(1)}(0)$  ( $0$  est une racine double de  $\varphi_G$ ), d'où :

$$u(G) = U(0)\mathbf{I}_n + U^{(1)}(0)G.$$

25. (a) Soient  $k$  et  $l$  deux entiers tels que  $1 \leq k \leq n$  et  $1 \leq l \leq n$ . Le coefficient ligne  $k$ , colonne  $l$  de  $F\overline{F}$  vaut :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w^{(k-1)(j-1)} w^{-(j-1)(l-1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (w^{k-l})^{j-1}.$$

Si  $k = l$ ,  $w^{k-l} = 1$ , et le coefficient vaut  $\sum_{j=1}^n 1 = n$ .

Si  $k \neq l$ . On a  $-(n-1) \leq k-l \leq n-1$  avec  $k-l \neq 0$  et donc,  $k-l$  n'est pas multiple de  $n$ . Par suite,  $w^{k-l} \neq 1$  et  $\sum_{j=1}^n (w^{k-l})^{j-1} = \frac{1 - (w^{k-l})^n}{1 - w^{k-l}} = \frac{1 - 1^{k-l}}{1 - w^{k-l}} = 0$ . En résumé,  $F\overline{F} = \mathbf{I}_n$ . Donc  $F$  est inversible et  $F^{-1} = \overline{F}$ .

- (b) Posons  $F^2 = (\alpha_{rs})_{1 \leq r, s \leq n}$ , on a :

$$\alpha_{rs} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w^{(r-1)(k-1)} w^{(k-1)(s-1)} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w^{(k-1)(r+s-2)} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( w^{(r+s-2)} \right)^k \quad (3)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } r+s = 2 \text{ ou } r+s = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{D'où } F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

- (c) On voit bien que  $F^4 = (F^2)^2 = \mathbf{I}_n$ . Le polynôme  $X^4 - 1$  est un polynôme annulateur de  $F$ , donc les valeurs propres de  $F$  se trouvent parmi les racines 4-ème de l'unité, en particulier  $\varrho(F) = 1$  et  $\varrho(F) < R_u$  ce qui montre que  $F \in \mathbb{M}_n(u)$ .
- (d) Le polynôme minimal de  $F$  étant de degré 3, donc il existe des scalaires  $a, b, c, d$  tels que  $u(F) = a\mathbf{I}_n + bF + cF^2 + dF^3$ , avec

$$\begin{cases} a + b + c + d &= U(1) \\ a - b + c - d &= U(-1) \\ a + bi - c - di &= U(i) \\ a - bi - c + di &= U(-i) \end{cases}, \quad \text{car les racines sont simples}$$

La résolution de ce système donne

$$\begin{cases} a &= \frac{1}{4} (U(1) + U(-1) - U(i) - U(-i)) \\ b &= \frac{1}{4} (U(1) - U(-1) - iU(i) + iU(-i)) \\ c &= \frac{1}{4} (U(1) + U(-1) + U(i) + U(-i)) \\ d &= \frac{1}{4} (U(1) - U(-1) + iU(i) - iU(-i)) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned}
u(F) &= \frac{1}{4} (U(1) + U(-1) - U(i) - U(-i)) \mathbf{I}_n + \frac{1}{4} (U(1) - U(-1) - iU(i) + iU(-i)) F \\
&\quad + \frac{1}{4} (U(1) + U(-1) + U(i) + U(-i)) F^2 + \frac{1}{4} (U(1) - U(-1) + iU(i) - iU(-i)) F^3 \\
&= \frac{1}{4} (U(1)(F + \mathbf{I}_n) - U(-1)(F - \mathbf{I}_n)(F^2 + \mathbf{I}_n)) \\
&\quad + \frac{1}{4} (U(i)(F + i\mathbf{I}_n) - U(-i)(F - i\mathbf{I}_n)(F^2 - \mathbf{I}_n))
\end{aligned}$$

26. (a) Dans ce cas la suite  $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$  est nulle à partir de  $N + 1$ , donc  $R_u = +\infty$  et par conséquent  $u$  satisfait la condition  $C^*$ .

De plus,  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k = \sum_{k=0}^N \mathbb{C}_N^k p^k (1-p)^{N-k} t^k = \sum_{k=0}^N \mathbb{C}_N^k p^k (1-p)^{N-k} (pt)^k = (pt + 1 - p)^N.$$

Considérons le polynôme  $R(X) = (pX + 1 - p)^N$ , ce polynôme vérifie les conditions qui caractérisent le polynôme  $Q$  ( la question 13. ). Donc

$$u(A) = (pA + (1-p)\mathbf{I}_n)^N.$$

- (b) Dans ce cas  $u_k = (1-p)^{k-1}p$  pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ .  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1-p$ , donc  $R_u = \frac{1}{1-p} > 1$ , d'où  $u$  vérifie la condition  $C^*$ .

$A$  étant diagonalisable, donc il existe  $P$  inversible  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  tels que  $A = PDP^{-1}$  où  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  désignent les valeurs propres de  $A$ . D'après la question 22., on a :

$$u(A) = u(PDP^{-1}) = Pu(D)P^{-1}$$

avec  $u(D) = \text{diag}(U(\lambda_1), \dots, U(\lambda_n))$  où

$$U(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda_i^k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \lambda_i^k = pt \sum_{l=0}^{\infty} [(1-p)t]^l = \frac{p\lambda_i}{1 - (1-p)\lambda_i}.$$

D'autre part, puisque  $\varrho(A) < R_u = \frac{1}{1-p}$ , alors la matrice  $\mathbf{I}_n - (1-p)A$  est inversible et semblable à  $\text{diag}(1 - (1-p)\lambda_i)$ . D'où

$$\begin{aligned}
u(A) &= Pu(D)P^{-1} \\
&= P \text{diag}(p\lambda_i, 1 \leq i \leq n) \text{diag}\left(\frac{1}{1 - (1-p)\lambda_i}, 1 \leq i \leq n\right) P^{-1} \\
&= pP \text{diag}(\lambda_i, 1 \leq i \leq n) P^{-1} P \text{diag}\left(\frac{1}{1 - (1-p)\lambda_i}, 1 \leq i \leq n\right) P^{-1} \\
&= pA(\mathbf{I}_n - (1-p)A)^{-1}.
\end{aligned}$$

• • • • •