CCINP (1h)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$.
   Pour tout $x > 0$, on note :
   $$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\Gamma(n) = (n-1)!$$
3. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge et qu'elle vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\rho_k = \ln k - \displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(t)dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\ln\Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln(t)dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k$$
   (On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.)
5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
   $$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2\ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t)\right)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1-\frac{t^2}{k^2}\right)dt$$
6. En déduire que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.
7. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque $n \to +\infty$:
   $$\ln\Gamma(n) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + o(1).$$
   En déduire que lorsque $n \to +\infty$:
   $$\Gamma(n) \sim e^c n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}.$$
8. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0, n]$ et on note :
   $$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$
   Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$$
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\forall x > 0,\ \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

10. On définit la fonction $1_{]0,n[}$ sur $\mathbb{R}_+$ en posant $1_{]0,n[}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]0,n[, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

En remarquant que $\Gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 1_{]0,n[}(t)\, t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$, utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).$$

En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

11. Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. En déduire que $e^c = \sqrt{2\pi}$ où c est défini à la question 7.
(On pourra faire appel aux résultats des questions 1 et 2)

Solution :

Q1. Notons f_x l'intégrande.
f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc deux bornes problématiques en général.

- En 0 : $f_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc f_x est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x > 0$.
- *En* $+\infty$: $f_x(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout x.

Finalement f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x \in]0, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-1}\, dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Q2.

- Soit $x > 0$.

Par une intégration par parties on a (crochet nul par croisance comparée)

$$\int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{\infty} + x\Gamma(x)$$

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

- On a $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-1}\, dt = 1$, par récurrence, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$$

on en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!}$

Q3. La relation fonctionnelle permet d'écrire pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)$ et donc ,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{2n-1}{2} \times \frac{2n-3}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n) \times (2n-1) \times \dots \times 3 \times 2}{2^n(2n) \times (2n-2) \times \dots \times 2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

On a $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$, posons $u = \sqrt{t}$ et donc $t = u^2$ et $dt = 2u\, du$ on obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}2udu \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\ .}$

La relation reste vraie si $n=0$.

Q4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$,on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k &= \sum_{k=1}^{n-1}\ln k-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\ln t\ dt\\ &= \ln((n-1)!)-\int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ln t\ dt\end{aligned}$$

donc $\boxed{\ln\Gamma(n)=\int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ln t dt+\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k}$

Q5. Soit $k\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\rho_k &= \ln k-\left[t\ln(t)-t\ \right]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\\ &= \ln k-\left((k+\frac{1}{2})\ln(k+\frac{1}{2})-(k-\frac{1}{2})\ln(k-\frac{1}{2})-1\right)\\ &= \ln k-\left[(k+t)\ln(k+t)-(k+t)\ \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\\ &= \ln k-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln(k+t)dt\\ &= \ln k-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\ln(k+t)dt-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(k+t)dt\\ &= \ln k-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\ln(k+t)dt-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\ln(k-t)dt\end{aligned}$$

ce qui donne $\rho_k=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2\ln k-(\ln(k+t)-\ln(k-t))\right)\ dt$, que l'on simplifie par

$$\rho_k=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\ln k^2-(\ln(k^2-t^2)\right)\ dt=\int_0^{\frac{1}{2}}-\ln\left(1-\frac{t^2}{k^2}\right)dt$$

Q6. La fonction $t\mapsto -\ln(1-t)$ est croissante sur $[0,1]$ donc , pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on a

$$0\leq\rho_k\leq\int_0^{\frac{1}{2}}-\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)dt=\frac{-1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$$

comme $\frac{-1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{8k^2}$ donc la série $\sum_{k\geq1}\frac{-1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$ converge , par comparaison la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\rho_k$ converge.

Q7.

- D'après la question Q4. on a lnΓ(n)=$\int_1^{n-\frac{1}{2}}\ln t dt+\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k$, posons $\sum_{k=1}^{+\infty}\rho_k=S$ donc $\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k=S+o(1)$

, par suite

$$\begin{aligned}\ln\Gamma(n) &= \int_1^{n-\frac{1}{2}}\ln t dt+S+o(1)\\ &= \left[t\ln(t)-t\ \right]_1^{n-\frac{1}{2}}+S+o(1)\\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{3}{2}+S+o(1)\end{aligned}$$

posons $c=\frac{3}{2}+S$, alors on a $\boxed{\ln\Gamma(n)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n-n+c+o(1)}$.

- Ce qui donne

$$\Gamma(n) = n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}\ e^{c}\ e^{o(1)} \text{ et } e^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 1$$

ainsi $\boxed{\Gamma(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{c} n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}.}$

Q8. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0, n]$ et on note.

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\ dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u = \dfrac{t}{n}$ alors pour tout $x > 0$ on a

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\ du$$

Q9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$et $x > 0$, une première intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\Gamma_n(x) &= n^x \int_0^1 \left(\frac{u^x}{x}\right)'(1-u)^n\ du \\
&= n^x \left[\frac{u^x}{x}(1-u)^n\ \right]_0^1 + \frac{n^x}{x} n \int_0^1 u^x(1-u)^{n-1}\ du \\
&= \frac{n^x}{x} n \int_0^1 u^x(1-u)^{n-1}\ du
\end{aligned}$$

après k intégration par parties, $k \in [\![2, n-1]\!]$,on obtient

$$\Gamma_n(x) = \frac{n^x(n(n-1)...(n-k+1))}{x(x+1)...(x+k-1)} \int_0^1 u^{x+k-1}(1-u)^{n-k}\ du$$

et à la n -ième étape on a donc

$$\Gamma_n(x) = \frac{n^x(n(n-1)...1)}{x(x+1)...(x+n-1)} \int_0^1 u^{x+n-1}\ du \text{ et } \int_0^1 u^{x+n-1}\ du = \frac{1}{x+n}$$

ce qui donne $\boxed{\Gamma_n(x) = \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}}$

Q10. Ecrivons $\Gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$, avec $f_n(t) = \mathbf{1}_{]0,n[}(t)\ t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$.

On a alors (les continuités utiles au théorème de CVD sont vérifiées sans peine)

- Domination :

Donc pour tout $]0, n[$ on a (convexité exponentielle) $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

Ainsi pour tout $]0, +\infty[$, $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}$ et la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

- Convergence simple :

Soit $x > 0$ et $t \in]0, +\infty[$, pour tout $n \geq t$ on a

$$\begin{aligned}
f_n(t) &= t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \\
&= t^{x-1}\exp\left(n\ln(1 - \frac{t}{n})\right) \\
&= t^{x-1}\exp\left(-t + o(1)\right)
\end{aligned}$$

donc $f_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t^{x-1}e^{-t}$, ainsi la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.

Le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f_x(t)dt,$$

par suite pour tout $x > 0$ $\boxed{\Gamma_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)\ .}$

Et la question Q9. donne pour tout $x > 0$ $\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}}$.

Q11.

- Soit $x > 0$,on a Γ(x+1)=xΓ(x)*donc*Γ(x+n)=(x+n-1)Γ(x+n-1)*parrécurrenceona*Γ(x+n)=(x+n-1)...xΓ(x).

Donc

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\ n^x} = \frac{(x+n-1)...x}{(n-1)!\ n^x}\Gamma(x) = \frac{n}{x+n}\left(\frac{(x+n)...x}{n!\ n^x}\Gamma(x)\right)$$

D'après ce qui précède on a pour tout $x > 0$, $\boxed{\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\ n^x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1}$.

- D'après un résultat obtenu on a Γ(n) $\underset{n\to+\infty}{\sim} e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}$.

La question Q3. donne $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ donc

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(n)\ n^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\frac{1}{\Gamma(n)n^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)^2 n^{\frac{1}{2}}}$$

par suite

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(n)\ n^{\frac{1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\frac{e^c(2n)^{2n-\frac{1}{2}}e^{-2n}}{(e^c n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n})^2 n^{\frac{1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}e^{-c}$$

Comme $\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(n)\ n^x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ alors $e^c = \sqrt{2\pi}$ et $\boxed{\Gamma(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}.}$