Devoir surveillé n° 6
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) La fonction f_n est le produit de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ par la fonction polynomiale S_n, qui sont toutes deux usuellement définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Leibniz : $f'(x) = -e^{-x}S_n(x) + e^{-x}S_n'(x)$. Or :
$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} = S_{n-1}(x),$$
   donc on a bien : $f_n'(x) = e^{-x}\left(S_{n-1}(x) - S_n(x)\right)$. Par télescopage : $S_{n-1}(x) - S_n(x) = -\dfrac{x^n}{n!}$, donc : $f_n'(x) = -\dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

2. (a) Ce résultat est vrai par croissances comparées. On peut le retrouver :
   Notons k la partie entière de r. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{r^n}{(n-1)!} &= r \times \frac{r}{1} \times \frac{r}{2} \times \cdots \times \frac{r}{k} \times \frac{r}{k+1} \times \frac{r}{n-1} \\ &\leq R \times \left(\frac{r}{k+1}\right)^{n-1-k}, \end{aligned}$$
   où $R = r \times \dfrac{r}{1} \times \dfrac{r}{2} \times \cdots \times \dfrac{r}{k}$ est une constante, et $\dfrac{r}{k+1} < 1$, donc $\left(\dfrac{r}{k+1}\right)^{n-1-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Donc, par encadrement, $\dfrac{r^n}{(n-1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1.(b) : $|f_n'(x)| = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!} \leq e^r \dfrac{r^n}{n!} = e^r \dfrac{r^n}{(n-1)!} \times \dfrac{1}{n}$.
   Or, d'après la question précédente, $e^r \dfrac{r^n}{(n-1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^r \times 0 = 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ e^r \dfrac{r^n}{(n-1)!} \leq 1$. On a alors : $\forall n \geq N,\ |f_n'(x)| \leq \dfrac{1}{n}$.

   (c) Soit $n \geq N$. Comme f_n est dérivable sur $[0, x]$, et que f_n' est bornée par $\dfrac{1}{n}$ sur cet intervalle, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis :
$$|f_n(x) - f_n(0)| \leq \frac{1}{n}|x - 0| \leq \frac{r}{n},$$
   c'est-à-dire : $\left|\dfrac{S_n(x)}{e^x} - 1\right| \leq \dfrac{r}{n}$. Comme $\dfrac{r}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a donc par encadrement :
   $\dfrac{S_n(x)}{e^x} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire : $S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$.

Exercice 2.

1. (a) D'après les propriétés du degré : $\deg(Q) \leq \max(\deg(BA'), \deg(B'A))$, où :

$$\deg(BA') = \deg(B) + \deg(A') = \deg(B) + \deg(A) - 1 = \deg(B'A).$$

Donc $\deg(Q) \leq \deg(A) + \deg(B) - 1$.

(b) Comme $C = A + B$, on a directement :

- $BC' - B'C = B(A' + B') - B'(A + B) = BA' - B'A = Q$,
- $CA' - C'A = (A + B)A' - (A' + B')A = BA' - B'A = Q$.

On a donc, d'après (a) : $\deg(Q) \leq \deg(B) + \deg(C) - 1$ et $\deg(Q) \leq \deg(A) + \deg(C) - 1$. Par conséquent :

$$\deg(Q) \leq S - 1 - \deg(A), \quad \deg(Q) \leq S - 1 - \deg(B) \quad \text{et} \quad \deg(Q) \leq S - 1 - \deg(C),$$

donc :

$$\deg(Q) \leq S - 1 - \max\left(\deg(A), \deg(B), \deg(C)\right).$$

2. (a) Notons $m = \mu_A(z)$. Comme z est une racine de A de multiplicité m, c'est une racine de A' de multiplicité $m - 1$; c'est-à-dire que $(X - z)^m$ divise A et $(X - z)^{m-1}$ divise A', donc, comme $Q = AB' - A'B$, $(X - z)^{m-1}$ divise Q. Donc $\mu_Q(z) \geq m - 1$.
En particulier, si $m > 1$, alors $\mu_Q(z) > 0$, donc $z \in R(Q)$, donc $z \in R(A) \cap R(Q)$. Réciproquement, si $z \in R(Q)$, alors z est racine de $A'B = AB' - Q$; or $z \notin R(B)$ puisque $R(A)$ et $R(B)$ sont disjoints, donc z est racine de A'. Donc $\mu_{A'}(z) = \mu_A(z) - 1 > 0$.

(b) Remarquons tout d'abord que l'inégalité précédente est également vraie pour B et C.
De plus, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss : $\deg(Q) = \sum_{z \in R(Q)} \mu_Q(z)$.

Comme $R(A)$, $R(B)$ et $R(C)$ sont deux à deux disjoints, on a alors :

$$\begin{aligned} \deg(Q) &\geq \sum_{z \in R(Q) \cap R(A)} \mu_Q(z) + \sum_{z \in R(Q) \cap R(B)} \mu_Q(z) + \sum_{z \in R(Q) \cap R(C)} \mu_Q(z) \\ &\geq \sum_{z \in R(Q) \cap R(A)} (\mu_A(z) - 1) + \sum_{z \in R(Q) \cap R(B)} (\mu_B(z) - 1) + \sum_{z \in R(Q) \cap R(C)} (\mu_A(z) - 1). \end{aligned}$$

Or, d'après l'équivalence précédente : $\sum_{z \in R(Q) \cap R(A)} (\mu_A(z) - 1) = \sum_{z \in R(A)} (\mu_A(z) - 1)$, et de même pour B et C. Donc :

$$\deg(Q) \geq \sum_{z \in R(A)} (\mu_A(z) - 1) + \sum_{z \in R(B)} (\mu_B(z) - 1) + \sum_{z \in R(C)} (\mu_C(z) - 1).$$

(c) À nouveau d'après le théorème de d'Alembert-Gauss :

$$\sum_{z \in R(A)} (\mu_A(z) - 1) = \sum_{z \in R(A)} \mu_A(z) - \sum_{z \in R(A)} 1 = \deg(A) - r(A),$$

et de même pour B et C, d'où la formule voulue. On a donc, d'après 1.(b) :

$$S - 1 - \max\left(\deg(A), \deg(B), \deg(C)\right) \geq \deg(Q) \geq S - \left(r(A) + r(B) + r(C)\right),$$

d'où, directement, l'inégalité de Mason-Stothers :

$$r(A) + r(B) + r(C) \geq 1 + \max\left(\deg(A), \deg(B), \deg(C)\right).$$

3. Supposons que A, B, C ne sont pas tous les trois constants. Comme $R(A^n) = R(A)$, et de même pour B et C, les polynômes A^n, B^n, C^n ne sont pas tous les trois constants et n'ont pas de racines communes ; donc l'inégalité de Mason-Stothers s'applique à A^n, B^n et C^n, et s'écrit :

$$r(A) + r(B) + r(C) \geq 1 + n \max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)).$$

Supposons par exemple que $\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) = \deg(A)$, on a alors, en remarquant que $r(A) \leq \deg(A)$ d'après d'Alembert-Gauss :

$$n \deg(A) + 1 \leq r(A) + r(B) + r(C) \leq \deg(A) + \deg(B) + \deg(C) \leq 3 \deg(A),$$

donc $1 \leq (3-n) \deg(A) \leq 0$, ce qui est absurde. Donc A, B, C sont constants.

On a ainsi démontré le théorème de Fermat polynomial*, bien plus simple que son homologue sur les entiers !*

L'inégalité de Mason-Stothers, démontrée par W. W. Stothers (1946-2009) en 1981 et redémontrée indépendamment par R. C. Mason (1958- ?) en 1983, a son équivalent dans le monde des entiers, connu sous le nom de conjecture abc. *La vérification de cette conjecture fournirait une démonstration du théorème de Fermat (entier) pour tout exposant $n \geq 6$, bien plus courte que la démonstration (1994) d'Andrew Wiles (1953-).*

Une démonstration de la conjecture abc a été proposée par Shinichi Mochizuki (1969-) en 2012, et publiée en 2020. Elle ne fait pour l'instant pas consensus parmi les spécialistes.

Exercice 3.

1. (a) Comme $f - g$ est continue et ne s'annule pas, elle est de signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
   (b) La fonction $|f - g|$ est continue sur $[0, 1]$ comme composée de fonctions continues, et positive puisque la fonction valeur absolue l'est. D'après le théorème de Weierstrass, $|f - g|$ admet donc un minimum $m \geq 0$ sur $[0, 1]$. Comme de plus $f - g$ ne s'annule pas, $m > 0$.
2. (a) Comme $g(x) \in [0, 1]$, on a d'après la question précédente : $f(g(x)) - g(g(x)) \geq m$.
   De même, comme $f(x) \in [0, 1]$: $f(f(x)) - g(f(x)) \geq m$. Donc, puisque f et g commutent : $f(f(x)) - f(g(x)) \geq m$.
   (b) D'après la question précédente : $f(f(x)) \geq m + f(g(x)) \geq m + m + g(g(x)) = 2m + g(g(x))$.
   (c) L'inégalité voulue est vraie pour $k = 1$ et $k = 2$ d'après les questions précédentes. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons-la vraie au rang k. Alors, comme f et g commutent, et d'après la question 1.b. :

   $$f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) \geq km + g^k(f(x)) = km + f(g^k(x)) \geq km + m + g(g^k(x)),$$

   donc l'inégalité est vraie au rang $k + 1$. Par récurrence, elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   Or : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ g^k(x) \in [0, 1]$, donc $km + g^k(x) \geq km \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc, d'après le théorème de divergence par minoration, $f^k(x) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est absurde puisque, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^k(x) \in [0, 1]$. Donc x_0 existe.

Problème.

I. 1. La fonction f est le quotient de $\sin$ par $h : x \mapsto x$, qui sont usuellement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme h ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, f est donc également de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{\sin'(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2},$$

puis

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(\cos(x) - x\sin(x) - \cos(x)) \times x^2 - (x\cos(x) - \sin(x)) \times 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{-(x^2-2)\sin(x) - 2x\cos(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

3. On a usuellement : $\sin^{(n)} = \begin{cases} \sin & \text{si} \quad n = 4k, \\ \cos & \text{si} \quad n = 4k+1, \\ -\sin & \text{si} \quad n = 4k+2, \\ -\cos & \text{si} \quad n = 4k+3. \end{cases}$

II. 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Pour $n = 0$: $\dfrac{P_0(x)\sin^{(0)}(x) + Q_0(x)\sin^{(1)}(x)}{x^1} = \dfrac{P_0(x)\sin(x) + Q_0(x)\cos(x)}{x}$, donc $P_0 = 1$ et $Q_0 = 0$,
- Pour $n = 1$: $\dfrac{P_1(x)\sin^{(1)}(x) + Q_1(x)\sin^{(2)}(x)}{x^2} = \dfrac{P_1(x)\cos(x) - Q_1(x)\sin(x)}{x}$, donc $P_1 = X$ et $Q_1 = 1$,
- Pour $n = 2$: $\dfrac{P_2(x)\sin^{(2)}(x) + Q_2(x)\sin^{(3)}(x)}{x^3} = \dfrac{-P_2(x)\sin(x) - Q_2(x)\cos(x)}{x}$, donc $P_2 = X^2 - 2$ et $Q_2 = 2X$.

2. On a vu que P_n et Q_n existent pour $n = 0, 1, 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P_n et Q_n existent. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}},$$

donc :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\left(P_n'(x)\sin^{(n)}(x) + P_n(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_n'(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+2)}(x)\right)x^{n+1}}{x^{2n+2}} \\ &\quad - \frac{\left(P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)\right) \times (n+1)x^n}{x^{2n+2}} \\ &= \frac{(xP_n(x) + xQ_n'(x) - (n+1)Q_n(x))\sin^{(n+1)}(x) + (xQ_n(x) - xP_n'(x) + (n+1)P_n)\sin^{(n+2)}(x)}{x^{n+2}}, \end{aligned}$$

donc :

$$P_{n+1} = XP_n + XQ_n' - (n+1)Q_n \quad (1) \qquad \text{et} \qquad Q_{n+1} = XQ_n - XP_n' + (n+1)P_n \quad (2)$$

conviennent. Donc P_{n+1} et Q_{n+1} existent. Par récurrence, P_n et Q_n existent donc pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En utilisant les formules (1) et (2), on a :

   - $P_3 = XP_2 + XQ_2' - 3Q_2 = (X^3 - 2X) + 2X - 6X = X^3 - 6X$,
   - $Q_3 = XQ_2 - XP_2' + 3P_2 = 2X^2 - 2X^2 + 3(X^2 - 2) = 3X^2 - 6$.

4. On a vu que les polynômes P_n et Q_n sont à coefficients entiers pour tout $n \in [\![0, 3]\!]$. Les formules de la question 2. montrent alors par récurrence directe que P_n et Q_n sont à coefficients entiers pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   De plus, pour tout $n \in [\![0, 3]\!]$, $\deg(P_n) = n$, $\deg(Q_n) = n - 1$ (sauf pour Q_0), et les coefficients dominants de P_n et Q_n sont respectivement 1 et n.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons ces assertions vraies au rang n. Alors :

   - d'après (1), P_{n+1} a pour terme dominant $X \times X^n = X^{n+1}$, donc a pour degré $n+1$ et pour coefficient dominant 1,
   - d'après (2), Q_{n+1} a pour terme dominant $(n+1) \times X^n$, donc a pour degré n et pour coefficient dominant $n+1$,

   donc les assertions sont vraies au rang $n+1$. Par récurrence, elles sont donc vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III. 1. Notons à nouveau $h : x \mapsto x$. On a $\sin = hf$, avec $h' = 1$ et : $\forall k \geq 2,\ h^{(k)} = 0$.
   D'après la formule de Leibniz, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \sin^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) \\ &= h(x) f^{(n)}(x) + n h'(x) f^{(n-1)}(x) \\ &= x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x), \end{aligned}$$

   ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^n \sin^{(n)}(x) &= P_n(x) \sin^{(n)}(x) + Q_n(x) \sin^{(n+1)}(x) \\ &\quad + n P_{n-1}(x) \sin^{(n-1)}(x) + n Q_{n-1}(x) \sin^{(n)}(x) \\ &= (P_n(x) + n Q_{n-1}) \sin^{(n)}(x) + (Q_n(x) - n P_{n-1}(x)) \sin^{(n-1)}(x), \end{aligned}$$

   d'où par identification : $P_n + nQ_{n-1} = X^n$ et $Q_n - nP_{n-1} = 0$, c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_{n+1} + (n+1) Q_n = X^{n+1} \quad (3) \qquad \text{et} \qquad Q_{n+1} = (n+1) P_n \quad (4).$$

2. En utilisant les relations (2) et (4), on a : $(n+1)P_n = XQ_n - XP_n' + (n+1)P_n$, donc :

$$P_n' = Q_n \quad (5).$$

   En utilisant les relations (1) et (3), on a : $X^{n+1} - (n+1)Q_n = XP_n + XQ_n' - (n+1)Q_n$, donc, d'après la relation (5) :

$$X^n = P_n + Q_n' = P_n + P_n'' \quad (6).$$

3. On sait que P_n est de degré n. Notons $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k X^k$, on sait également que $p_n = 1$.

   La relation (6) s'écrit alors :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) p_k X^{k-2} + \sum_{k=0}^{n} p_k X^k = X^n,$$

donc par identification : $p_n = 1$, $p_{n-1} = 0$ et : $\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ (k+2)(k+1)p_{k+2} + p_k = 0$.
Par conséquent :

$$p_{n-1} = p_{n-3} = \cdots = p_{n-(2k-1)} = 0 \quad \text{où } k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

et : $p_{n-2} = -n(n-1)p_n = -n(n-1)$, $p_{n-4} = -(n-2)(n-3)p_{n-2} = n(n-1)(n-2)(n-3)$, et plus généralement :

$$\forall k \in \left[\!\left[0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]\!\right],\ p_{n-2k} = (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!}.$$

Donc :

$$P_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!} X^{n-2k}.$$

4. D'après la relation (6), la fonction polynomiale $x \mapsto P_n(x)$ est une solution particulière de l'équation considérée. De plus, l'équation homogène associée $y_h'' + y_h = 0$ a classiquement pour solutions les $y_h : x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, donc :

$$S = \left\{ y : x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + P_n(x) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$