# **Sujet CCINP (3h)** (Corrigé)

## Exercice 1 : Matrices unipotentes

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On considère également l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices dites unipotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent $U = I + N$, où $N \in \mathcal{N}$ et $I$ est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Etude d'une matrice semblable à une matrice unipotente.
   On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice $A$.
   **Solution :**
   On remarque que la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1. On est donc sûr que $1 \in Sp(A)$ ( et que $Vect(1,1,1) \subset E_1(A)$ ).
   En mettant à profit cette observation ( i.e en ajoutant les deux dernières colonnes à la première) puis en factorisant par $\lambda - 1$ dans la première colonne, nous obtenons $\chi_A = (\lambda - 1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & \lambda+1 & -2 \\ 1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix}$.
   En soustrayant la première ligne aux deux autres, il vient $\boxed{\chi_A = (\lambda-1)^3}$ donc $\boxed{Sp(A) = \{1\}}$ ■

   (b) La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? On demande une réponse sans calcul.
   **Solution :**
   Si c'était le cas $A$ serait semblable à $I_3$ donc égale à cette matrice et ce n'est pas le cas. Ainsi :
   $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable ( mais bien trigonalisable )}}$ ■

   (c) Déterminer les sous-espaces propres de $A$.
   **Solution :**
   On a sans peine : $\boxed{E_1(A) = Vect(1,1,1)}$ ■

   (d) Résoudre l'équation $(A - I)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   **Solution :**
   L'ensemble des solutions est $\boxed{\left\{\begin{pmatrix} a \\ a-1 \\ a \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R}\right\}}$ ■

(e) On note $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A$. Déterminer trois vecteurs $e_1, e_2$ et $e_3$ de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = 2e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f(e_3) = -2e_2 + e_3$$

On pourra utiliser la question précédente.
**Solution :**
Compte tenu de ce qui précède, nous prenons sans risque $e_1 = (1,1,1)$.
On pose alors ( cf question précédente $e_2 = (a, a-1, a)$ ) pour satisfaire la seconde contrainte.
Le candidat le plus attractif semble $(0,-1,0)$ or $(f - id)((1,-1,0)) = (0,2,0)$. On peut donc poser $e_2 = (0,-1,0)$ et $e_3 = (1,-1,0)$■

(f) En déduire une matrice $P$ telle que $A = PBP^{-1}$.
**Solution :**
La famille $(e_1, e_2, e_3)$ est clairement libre donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ et , dans cette base, la matrice de $f$ est justement $B$ d'où la similitude espérée de $A$ et $B$■

2. Etude de $\mathcal{N}$.

(a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et sa dimension.
**Solution :**
Pour $(i,j) \in [\![1,3]\!]^3$, on désigne par $E_{ij}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indices $i, j$ qui lui vaut 1. Ces matrices constituent une base de $M_3(\mathbb{R})$.
A l'évidence $\mathcal{N} = Vect(E_{12}, E_{13}, E_{23})$, ainsi ( avec ce qui précède ), on a affaire à un sev de $M_3(\mathbb{R})$ dont la description donne auusi une base■

(b) Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tout $(N, M) \in \mathcal{N}^2$, on a $NM \in \mathcal{N}$.
**Solution :**
Clair puisque le produit de deux matrices triangulaires supérieures de diagonales nulles est du même type■

(c) Calculer $N^3$ pour $N \in \mathcal{N}$.
**Solution :**
Simple calcul ou Cayley-Hamilton, ce qui donne $N^3 = 0_3$■

3. Etude de $\mathcal{U}$.

(a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ? On justifiera la réponse.
**Solution :**
Non puisque la matrice nulle n'appartient pas à $\mathcal{U}$■

(b) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit.
**Solution :**
Résulte de la même propriété pour $\mathcal{N}$ et du fait que ce dernier ensemble est stable par combinaison linéaire car sev■

(c) Montrer que $\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
**Solution :**
Toutes les matrices de $\mathcal{U}$ ont un déterminant égal à 1, il en résulte qu'elles sont bien inversibles■

4. Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par

$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$$

On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une notation : il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances.

(a) Calculer $B^{(\alpha)}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ où $B$ est la matrice définie à la question 1.
**Solution :**
On trouve $B^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 2\alpha(1-\alpha) \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ■

(b) Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}$.
**Solution :**
Résulte de la définition de $\mathcal{U}$■

(c) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$

**Solution :**
Simple calcul en utilisant que $N^3 = N^4 = 0_3$ pour la première égalité.
C'est plus confus $\left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = I + \beta(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2) + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\alpha^2 N^2 = +\alpha\beta N + \frac{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}{2}N^2 = U^{(\alpha\beta)}$■

(d) En déduire que $U^{(n)} = U^n$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U^{(n)} = \underbrace{U \times \ldots \times U}_{n \text{ fois}}$
**Solution :**
Récurrence directe à partir de la question précédente ( première partie)■

(e) Retrouver que $U^{(n)} = U^n$ pour $n \geqslant 2$ en utilisant la formule du binôme de Newton. Qu'en est-il pour $n = 0$ et $n = 1$ ?
**Solution :**
Evident■

(f) Montrer que $U^{(-1)} = U^{-1}$.
**Solution :**
En effet par c) le produit $UU^{(-1)} = I$ ■

5. (a) En utilisant les résultats de la question 4 , expliciter une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Cette matrice est-elle unique ?
**Solution :**
Soit $C = B^{(1/2)}$ alors avec 4.c) $C^2 = B$. Non unique puisque $-C$ convient aussi ■

(b) En déduire comment déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = A$ (on ne calculera pas explicitement la matrice $D$ ).
**Solution :**
Avec les notations de 1.f) la matrice $PCP^{-1}$ fait l'affaire■

# Exercice 2 : Probabilités

Cet exercice comporte trois parties. Les parties 2 et 3 sont indépendantes.
Un jeu consiste à lancer un ballon dans un panier. On suppose que la probabilité de réussir le panier est $p \in ]0, 1[$ et que les lancers sont indépendants. On note $q = 1 - p$.

## Partie 1 : Etude du jeu de lancer

1. On note $T$ le nombre de lancers nécessaires pour réussir un panier pour la première fois. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $T$ ? On explicitera la loi sans démonstration.

**Solution :**
Il s'agit d'une loi géométrique de paramètre $p$■

2. On effectue une infinité de lancers. Calculer la probabilité de réussir au moins un panier.
**Solution :**
L'événement dont on cherche la probabilité est $(T \geq 1)$ et cette probabilité vaut 1 puisque $T$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$■

3. L'organisateur du jeu ne connait pas la valeur de $p$ et souhaite en connaître une valeur approchée. Pour cela il observe $N \in \mathbb{N}^*$ lancers et note le nombre $S_N$ de paniers réussis.

   (a) Quelle est la loi de $S_N$ ? On explicitera la loi en justifiant brièvement la réponse.
   **Solution :**
   $S_N$ est la somme de $N$ variables aléatoires indépendantes, suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p$.
   Ainsi $S_N$ suit une loi binomiale de paramètres $N$ et $p$■

   (b) Montrer que $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.
   **Solution :**
   Simple étude de la fonction $x \to x(1-x)$ sur le segment $[0,1]$ dont le maximum est atteint en $1/2$■

   (c) Montrer que pour $\varepsilon > 0, \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4N\varepsilon^2}$.
   **Solution :**
   C'est la loi faible des grands nombres combinée avec la majoration précédente■

## Partie 2 : Un deuxième jeu

Le joueur met une pièce de 1 euro dans un sac à chaque lancer du ballon. Une fois le panier réussi, l'organisateur organise un deuxième jeu :

- L'organisateur enlève une pièce de 1 euro, qu'il garde pour lui, et la remplace par une pièce noire qui donne droit à $M \geqslant 2$ euros.
- Le joueur tire une pièce du sac.
- L'organisateur conserve les autres pièces du sac.

On rappelle que la variable $T$ a été définie à la question 1 .

4. On suppose dans cette question que $n \in \mathbb{N}^*$ et l'événement $(T = n)$ est réalisé : il y a donc $n$ pièces dans le sac : $n-1$ pièces de 1 euro et la pièce noire.
On note $G_n$ la variable aléatoire égale au gain, éventuellement négatif, de l'organisateur.

   (a) Vérifier que $G_n(\Omega) = \{n-M, n-1\}$, puis donner la loi de $G_n$.
   **Solution :**
   Compte tenu des règles du jeu, après le n-ième lancer enfin réussi le joueur tire une pièce dans le sac où se trouvent $n-1$ pièces de un euro et la pièce noire. Donc après tirage la valeur restante du sac est soit $n-1$ si la pièce noire est tirée soit $n-2+M$ si une boule blanche est tirée ; la mise de l'organisateur se monte à $M-1$ ( puisqu'il échange une pièce d'un euro avec la pièce noire) ainsi le gain peut valoir $n-1-(M-1)$ ou $n-2+M-(M-1)$ ce qui donne bien $\boxed{G_n(\Omega) = \{n-M, n-1\}}$□
   On a aussi $\boxed{\mathbf{P}(G_n = n-M) = \frac{1}{n}}$ et $\boxed{\mathbf{P}(G_n = n-1) = \frac{n-1}{n}}$ ■

   (b) Calculer l'espérance de $G_n$.
   **Solution :**
   Par définition de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire fini $\boxed{\mathbf{E}(G_n) = n - 1 - \frac{M-1}{n}}$■

5. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et les exprimer à l'aide de fonctions usuelles : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n-1}}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$.
   **Solution :**
   C'est du cours ; le rayon de convergence de ces deux séries entières vaut $\boxed{1}$.
   Par ailleurs et pour $x \in ]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = (\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$ et
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \frac{-\ln(1-x)}{x}$ si de plus $x \neq 0$ ( cette égalité se prolonge par continuité en 0)■

   On pourra utiliser ces résultats dans les calculs des questions suivantes.
6. On note $A$ l'événement "tirer la pièce noire".
   (a) Exprimer pour $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de $\mathbf{P}_{(T=n)}(A)$.
   **Solution :**
   Cette probabilité a été déterminée en 4.a : $\boxed{\mathbf{P}_{(T=n)}(A) = \frac{1}{n}}$.
   ■

   (b) En utilisant la formule des probabilité totales, dont on justifiera l'utilisation, montrer que
   $$\mathbf{P}(A) = \frac{p}{q}\ln\left(\frac{1}{p}\right)$$
   **Solution :**
   $T$ étant une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ la famille $(T = n)_{n\geq 1}$ constitue un système complet d'événements.
   La formule des probabilités totales appliquée pour ce système donne alors :
   $\mathbf{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_{(T=n)}(A)\mathbf{P}((T = n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{pq^{n-1}}{n} = -\frac{p}{q}\ln(1-q)$, ce avec le DSE obtenu en 5.
   Soit aussi $\boxed{\mathbf{P}(A) = \frac{p}{q}\ln\left(\frac{1}{p}\right)}$■

7. On note $G$ la variable aléatoire égale au gain, éventuellement négatif, de l'organisateur après ce deuxième jeu.
   (a) Montrer que $G(\Omega) = \{k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 1-M\}$.
   **Solution :**
   $G(\Omega) = \bigcup_{n\geq 1} G_n(\Omega) = (\bigcup_{n\geq 1}\{n-M\}) \cup (\bigcup_{n\geq 1}\{n-1\})$. Cette dernière réunion est bien faite de tous les entiers relatifs supérieurs ou égaux à $1-M$■

   (b) Donner pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in G(\Omega)$ la valeur de $\mathbf{P}_{(T=n)}(G = k)$.
   On distinguera les cas $k = n-1, k = n-M$ et $k \notin \{n-1, n-M\}$.
   **Solution :**
   Pour tout $k$ entier tel que $k \geq 1-M$, on a $\mathbf{P}_{(T=n)}(G = k) = \mathbf{P}(G_n = k)$ ; cette dernière vaut 0 si $k \notin \{n-1, n-M\}$, $\frac{1}{n}$ si $k = n-M$ et $\frac{n-1}{n}$ si $k = n-1$■

   (c) En déduire que la loi de $G$ est donnée par : pour tout $k \in G(\Omega)$,
   $$\mathbf{P}(G = k) = \begin{cases} \frac{k}{k+1}pq^k + \frac{1}{k+M}pq^{k+M-1} & \text{si } k \geqslant 0 \\ \frac{1}{k+M}pq^{k+M-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$
   **Solution :**
   Démarche identique à celle employée en 6.b. On a toujours $k \geq 1-M$
   $\mathbf{P}(G = k) = p\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_{(T=n)}(G = k)q^{n-1}$ mais si $n \neq k+1$ et $n \neq k+M$ la probabilité conditionnelle en jeu est nulle donc, avec ce qui précède et si $k \geq 0$ $\mathbf{P}(G = k) = p(\frac{k}{k+1}q^{k+1-1} + \frac{1}{k+M}q^{k+M-1}$ ( deux contributions de $n \geq 1$ dans la somme pour ce cas) ; enfin si $k < 0$ ( seule valeur de $n$ possible $k+M$ ), on trouve $\mathbf{P}(G = k) = p\frac{1}{k+M}q^{k+M-1}$. Ce qui est le résultat attendu■

8. Calcul de l'espérance de $G$.

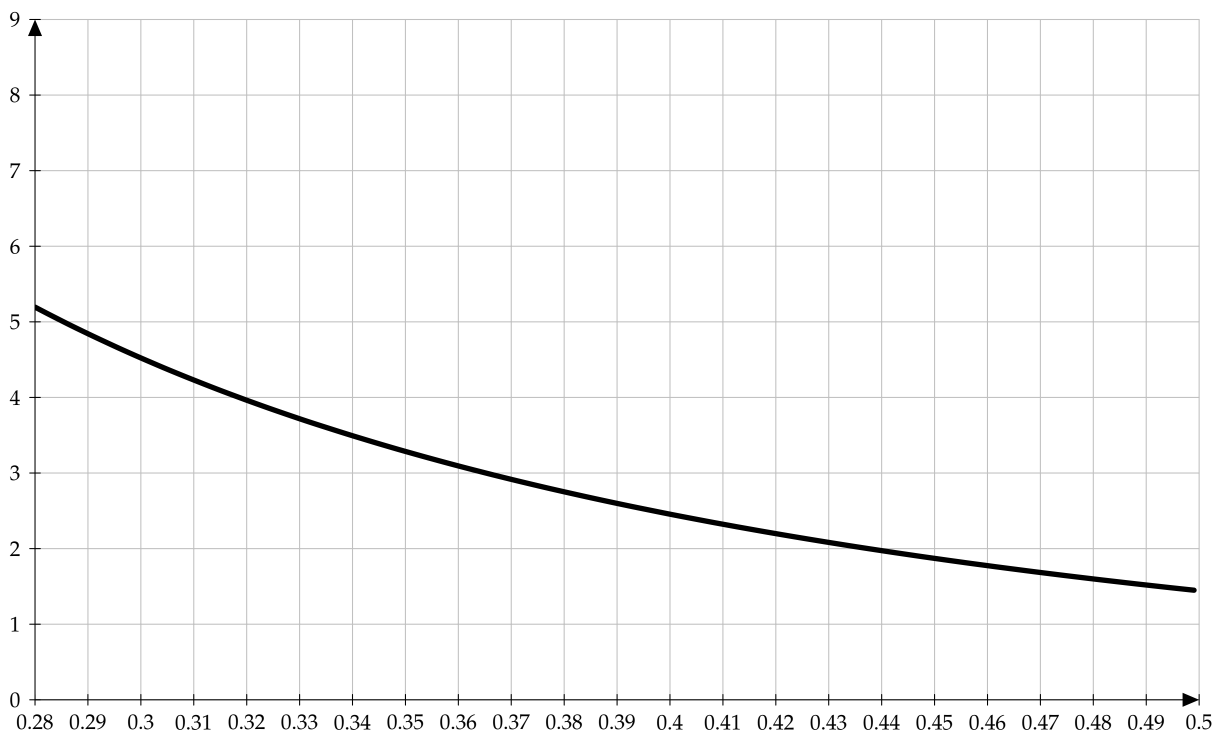
 (a) Montrer que la série de terme général $\mathbf{E}(G_n)\,\mathbf{P}(T=n)$ est convergente.
 **Solution :**
 On sait que $q \in ]0,1[$ et que ( cf 4.b ) que $\mathbf{E}(G_n) = O(n)$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \mathbf{E}(G_n)\, x^{n-1}$ vaut au moins 1 ; cette série converge bien■

 (b) On admet qu'alors $G$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}(G_n)\,\mathbf{P}(T=n).$$

 Calculer $\mathbf{E}(G)$, que l'on exprimera en fonction de $p$ et $M$ uniquement.
 **Solution :**
 La formule admise, l'expression de $\mathbf{E}(G_n)$ obtenue en 4.b, les DSE usuels donnent : $\mathbf{E}(G) = p(\frac{1}{(1-q)^2} - \frac{1}{1-q} + (M-1)\frac{\ln(1-q)}{q}$ soit aussi
 $\boxed{\mathbf{E}(G) = \frac{1-p}{p} + (M-1)\frac{p\ln(p)}{1-p}}$■

9. Voici un extrait de la courbe représentative de la fonction $\psi : p \mapsto \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \frac{1}{\ln \frac{1}{p}}$.




On dira que le jeu est rentable pour l'organisateur lorsque son espérance de gain est positive. Dans les questions suivantes, on justifiera les résultats obtenus.

 (a) Montrer que $\mathbf{E}(G) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \psi(p) \geqslant M-1$.
 **Solution :**
 Avec la question précédente, le jeu est rentable si $\frac{1-p}{p} - (M-1)\frac{p\ln(1/p)}{1-p} \geq 0$. Ce qui équivaut très exactement à la condition souhaitée■
 **La courbe figurant sur le sujet distribué était erronée, on l'a rectifiée ici.**

 (b) L'organisateur sait que $p = 0,3$. Quelles valeurs de $M$ peut-il choisir pour que le jeu soit rentable ?
 **Solution :**
 En lisant sur la bonne courbe, on voit que $M$ peut appartenir à $\boxed{\{2,3,4,5\}}$■

(c) L'organisateur souhaite choisir $M = 6$ euros. Quelle valeur maximale de $p$ doit-on avoir pour que ce jeu reste rentable ?
**Solution :**
En lisant sur la bonne courbe, on voit que $p_{max} = 0,28$■

(d) Pour quelles valeurs de $p$ le jeu ne peut pas être rentable ?
**Solution :**
Pour la partie représentée de la bonne courbe, le jeu est toujours rentable mais comme la limite de $\psi$ en $1^-$ est nulle, il ne le sera plus si le joueur est très adroit■

## Partie 3 : Une autre estimation du paramètre

La partie 1 donne un résultat permettant d'approcher la valeur de $p$ par $\frac{S_N}{N}$. On prouve dans cette partie un résultat similaire en utilisant une méthode dite de grandes déviations. On suppose que $p \in ]0, \frac{1}{2}[$. Pour $\lambda \geqslant 0$, on pose

$$h(\lambda) = (1-p)e^{-\lambda p} + pe^{\lambda(1-p)} \quad \text{et} \quad g(\lambda) = \ln h(\lambda).$$

On admet que pour tout $\lambda \geqslant 0$, on a $g(\lambda) \leqslant \frac{\lambda^2}{2}$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, et on pose $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ et $\lambda \geqslant 0$.

10. (a) Montrer que

$$\mathbf{E}\left(e^{\lambda(X_1-p)}\right) = e^{g(\lambda)}.$$

On justifiera bien le calcul.
**Solution :**
La variable aléatoire $f(X_1) = e\lambda\,(X_1 - p)$ est fini donc possède une espérance mathématique que l'on évalue avec la formule du transfert.
$\boxed{\mathbf{E}\left(f(X_1)\right) = f(0)(1-p) + f(1)p = h(\lambda)}$■

(b) En déduire que

$$\mathbf{E}\left(e^{\lambda(S_N-Np)}\right) \leqslant e^{\frac{N}{2}\lambda^2}$$

**Solution :**
En premier lieu : $e^{\lambda(S_N-Np)} = f(X_1)f(X_2)...f(X_N)$.
On sait en outre que les $X_i$ sont indépendantes et suivent une même loi donc il en va de même pour les $f(X_i)$.
Enfin, par propriété de l'espérance mathématique, $\mathbf{E}(f(X_1)f(X_2)...f(X_N)) = (\mathbf{E}(X_1)^N = e^{Ng(\lambda)}$, ce par la question précédente.
Comme on sait que $g(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{2}$ donc on a aussi $e^{Ng(\lambda)} \leq e^{\frac{N\lambda^2}{2}}$, ce qui donne le résultat voulu■

(c) En utilisant l'inégalité de Markov, déduire des questions précédentes que pour $\varepsilon > 0$, et $\lambda > 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_N}{N} - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-N\lambda\varepsilon + \frac{N}{2}\lambda^2\right)$$

**Solution :**
On applique l'inégalité de Markov à $X = e^{\lambda(S_N-Np)}$ qui est positive et dans $L^1$ avec $t = e^{N\lambda\epsilon} > 0$ et puisque l'événement $(X \geq t) = (\frac{S_N}{N} - p \geq \epsilon)$, nous obtenons :
$\mathbf{P}\left(\frac{S_N}{N} - p \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{e}^{-N\lambda\epsilon} \leq e^{\frac{N\lambda^2}{2} - N\lambda\epsilon}$, ce en vertu de l'inégalité obtenue à la question précédente■

(d) En choisissant bien $\lambda$, en déduire que

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_N}{N} - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-\frac{N}{2}\varepsilon^2}$$

**Solution :**
Il suffit de prendre $\lambda = \epsilon$■

11. On admet que l'on pourrait montrer de manière similaire que

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-\frac{N}{2}\epsilon^2}$$

On souhaite évaluer l'erreur faite en prenant $\frac{S_N}{N}$ comme valeur approchée de $p$. Expliquer en quoi la majoration ci-dessus est utile pour faire cette évaluation. A quelle condition sur $\varepsilon$ et $N$ la méthode de grandes déviations de la partie 3 est-elle plus intéressante que celle de la partie 1 ?

Un raisonnement, même incomplet, interprétant les résultats obtenus sera valorisé.
**Solution :**
Cette majoration permet de majorer la probabilité de l'erreur commise en assimilant $p$ à la fréquence $\frac{S_N}{N}$ pour $N$ relativement grand tout comme la loi faible des grands nombres. Cette méthode sera néanmoins plus efficace si $e^{-\frac{N}{2}\epsilon^2} \leq \frac{1}{4N\epsilon^2}$ ou $e^{\frac{N}{2}\epsilon^2} \geq 4N\epsilon^2$■