Mines+ (3h) : Corrigé

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{A}$ un sous ensemble de $M_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est *extrémale dans* $\mathcal{A}$ si pour tous M, N dans $\mathcal{A}$ et tout $\lambda \in]0,1[$, on a l'implication :

$$A = \lambda M + (1-\lambda)N \Longrightarrow A = M = N.$$

On note B_n l'ensemble des matrices *bistochastiques* de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,i} = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
On note enfin P_n l'ensemble des matrices de permutation $M_\sigma \in M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont de la forme :

$$(M_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tous i, j dans $\{1, 2, \dots, n\}$, où σ est une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$.

La partie A n'est pas indispensable à la résolution des parties suivantes.

A Un exemple

Soit J la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire par $J_{i,j} = 1$ si $j - i = 1$ ou $i - j = n - 1$, et $J_{i,j} = 0$ sinon.

1. Montrer que J est une matrice de permutation. Calculer les valeurs propres réelles et complexes de J, et en déduire que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
   Solution :
   Considérons la permutation $\sigma = (n, 1, 2 ..., n-1)$ (comprendre $\sigma(1) = n, \sigma(2) = 1 .., \sigma(n) = n-1)$), on a bien $\boxed{M_\sigma = J}$ $\square$
   En développant suivant la première colonne, nous trouvons $\boxed{\chi_J = \lambda^n - 1}$. On en déduit que $\boxed{Sp_{\mathbb{C}}(J) = \mathbb{U}_n}$ et J s'en trouve diagonalisable sur $\mathbb{C}$ puisque son polynôme caractéristique y est scindé à racines simples.
   Notez en outre que $\boxed{Sp_{\mathbb{R}}(J) = \{1\}}$ si n est impair mais $\boxed{Sp_{\mathbb{R}}(J) = \{1, -1\}}$ si n est pair ■

2. Déterminer une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres de J.
   Solution :
   Soit $\alpha \in \mathbb{U}_n$, la résolution du système $JX = \alpha X$ conduit à $\boxed{E_\alpha = Vect(x_\alpha = (1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}))}$. En conséquence $\boxed{(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{U}_n}}$ est une base de $\mathbb{C}^n$, constituée de vecteurs propres de J■

   Dans les trois questions suivantes n désigne un entier naturel *impair* ≥ 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note X_m une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$ telle que

- $X_0 = 0$ avec probabilité 1 ;
- si $X_m = k$, alors ou bien $X_{m+1} = k-1$ modulo n, ou bien $X_{m+1} = k+1$ modulo n, ceci avec équiprobabilité.

On note

$$U_m = \begin{pmatrix} P(X_m = 0) \\ P(X_m = 1) \\ \vdots \\ P(X_m = n-1) \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer U_0 et une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $U_{m+1} = AU_m$. On exprimera A à l'aide de la matrice J.
Solution :
Par hypothèse $\boxed{U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$ □
$((X_m = 0), ..., (X_m = n-1))$ est un système complet d'événements dans lequel nous appliquons la formule des probabilités totales. Ce qui donne :
$P(X_{m+1} = i) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X_{m+1} = i | X_m = j) P(X_m = j)$, ce pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.
Compte tenu du contexte la probabilité conditionnelle $P(X_{m+1} = i | X_m = j) = 0$ si $|i-j| \neq 1$ modulo n et $P(X_{m+1} = i | X_m = j) = \dfrac{1}{2}$ sinon.
Par exemple si $i = 0$, $P(X_{m+1} = 0) = \dfrac{P(X_m = 1) + P(X_m = n-1)}{2}$.
Et plus généralement $P(X_{m+1} = i) = \dfrac{P(X_m = i-1) + P(X_m = i+1)}{2}$ si $i \in [\![0, n-2]\!]$.
Puis $P(X_{m+1} = n-1) = \dfrac{P(X_m = 0) + P(X_m = n-2)}{2}$.
De tout ceci on tire $U_{m+1} = AU_m$, où $\boxed{A = \dfrac{J + {}^tJ}{2}}$ ■

4. Déterminer les valeurs propres de la matrice A et un vecteur propre de $\mathbb{R}^n$ unitaire associé à la valeur propre de module maximal.
Solution :
Comme A est symétrique réelle, A s'en trouve diagonalisable à valeurs propres toutes réelles.
Les valeurs propres de ${}^tJ$ sont celles de J et si $\alpha \in \mathbb{U}_n$, l'espace propre associé est la droite engendrée par le vecteur $x_{\overline{\alpha}}$.
Notons V_n (resp. W_n) l'ensemble des éléments de $\mathbb{U}_n$ dont la partie imaginaire est strictement positive (resp. négative). On passe de l'un à l'autre de ces ensembles par conjugaison. Leur cardinal (n est impair) est $\dfrac{n-1}{2}$.
On pose alors $y_1 = x_1$ et, pour $\alpha \in V_n$, $y_\alpha = \dfrac{x_\alpha + x_{\overline{\alpha}}}{2}$ et $z_\alpha = \dfrac{x_\alpha - x_{\overline{\alpha}}}{2i}$.
Tous ces vecteurs appartiennent à $\mathbb{R}^n$, ils forment une famille libre de cet espace vectoriel (cela résulte de la liberté sur $\mathbb{C}$ de la famille $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{U}_n}$, à vous de détailler); il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^n$ puisque le cardinal de cette famille vaut n.
Vérifions maintenant que tous ces vecteurs sont vecteurs propres de A.
Immédiatement $Ax_1 = x_1$ puis, pour $\alpha \in V_n$, $Ay_\alpha = \dfrac{1}{4}((\alpha + \overline{\alpha})(x_\alpha + x_{\overline{\alpha}})) = \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} y_\alpha$ et similairement $Az_\alpha = \dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i} z_\alpha$.
Bilan : (on pose $n = 2p+1$) : $\boxed{Sp(A) = \{\cos(\dfrac{2k\pi}{2p+1}) | k \in [\![0, p]\!]\} \cup \{\sin(\dfrac{2k\pi}{2p+1}) | k \in [\![1, p]\!]\}}$ et en normant x_1 nous obtenons le vecteur unitaire à savoir $\dfrac{1}{\sqrt{n}}(1, ..., 1)$, associé à la valeur propre de module maximum i.e 1■

5. En déduire la limite de U_m lorsque $m \to +\infty$.
Solution :
$A = Qdiag(1, \lambda_1, ..., \lambda_{2p})Q^{-1}$, où les λ_i sont en module strictement inférieur à 1. Il s'ensuit que la suite (U_m) converge vers $Q(1, 0, ..., 0)Q^{-1}U_0 = L$ mais par ailleurs, en passant à la limite dans l'égalité otenue en Q3, $AL = L$ donc L est colinéaire à x_1 et, c'est aussi un vecteur de probabilité donc $\boxed{\frac{1}{n}(1, ..., 1)}$.
On remarque deux choses (en fait liées) le non rôle joué par la condition initiale et l'équiprobabilité à la limite■

B Théorème de Birkhoff-Von Neumann

6. Montrer que l'ensemble B_n est convexe et compact. Est-il un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$?
Solution :
La convexité est immédiate à vérifier. Le caractère borné de B_n aussi puisque B_n est inclus dans la sphère unité de $M_n(\mathbb{R})$, muni de la norme infinie.
On peut vérifier que B_n est fermé par caractérisation séquentielle ou considérer l'application continue $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\phi((M_{i,j})) = \sum_{i=1}^{n}(|\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} - 1| + |\sum_{j=1}^{n} M_{j,i} - 1|)$, comme $B_n = \phi^{-1}(\{0\})$, B_n est bien un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.
B_n n'est bien sûr pas un sev de $M_n(\mathbb{R})$ puisqu'il ne contient pas la matrice nulle■

7. Montrer que $P_n \subset B_n$ et que P_n est un sous-groupe multiplicatif [1].
Tout élément de P_n est-il diagonalisable sur $\mathbb{C}$? L'ensemble P_n est-il convexe ?
Solution :
Puisque sur chaque ligne et chaque colonne d'une matrice de permutation ne figure qu'un seul coefficient non nul et que celui-ci vaut 1, une telle matrice est bien bistochastique□
$I_n \in P_n$ donc cet ensemble est non vide. Prenons σ et τ deux permutations et examinons le produit $M = M_\sigma M_\tau$.
On posera, pour simplifier, $M_\sigma = A$ et $M_\tau = B$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$: $M_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} = 0$ si $i \neq \sigma(k)$ ou $k \neq \tau(j)$, ce pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
Dans le cas contraire il existe un et un seul k de $[\![1, n]\!]$ tel que $i = \sigma(k)$ et $k = \tau(j)$, ce qui ne se produit que lorsque $i = \sigma o \tau(j)$ et dans cette situation $M_{i,j} = 1$.
Bilan 1 : $\boxed{M_\sigma M_\tau = M_{\sigma o \tau}}$, comme la composée de permutations en est une autre, P_n est stable par la multiplication matricielle.
La relation fonctionnelle précédente prouve que, pour toute permuation σ, M_σ est inversible d'inverse $M_{\sigma^{-1}}$ puisque $M_{id} = I_n$.
Il en résulte que P_n est bien un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
En revanche P_n n'est pas convexe (en général $n \geq 2$) puique $M = \frac{I_n + P}{2}$, où P est la matrice de la permutation qui échange 1 et 2 en laissant fixe les autres entiers possède un coefficient valant 1/2, ce qui lui interdit d'être une matrice de permuation.
Soit $M \in P_n$ alors pour tout entiers s, $M^s \in P_n$, ces matrices ne peuvent être toutes différentes puisque P_n est fini, il en résulte qu'il existe deux entiers $r < s$ tels que $M^s = M^r$ et puisque M est inversible : $M^{s-r} - I_n = 0_n$.
Ainsi $X^{n-r} - 1$ est un polynôme annulateur de M scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et M est bien diagonalisable sur $\mathbb{C}$■

8. Montrer que toute matrice de P_n est extrémale dans B_n.
Solution :
Considérons deux matrices bistochastiques A et B, une permutation σ et un réel λ pour lesquels nous avons :

[1] partie non vide de $GL_n(R)$ stable par produit et passage à l'inverse

$M = M_\sigma = (1-\lambda)A + \lambda B$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:
Première éventualité $i \neq \sigma(j)$ auquel cas $(1-\lambda)A_{i,j} + \lambda B_{i,j} = 0$ puis, par positivité des coefficients de A et B et stricte positivité de λ et $1-\lambda$, $A_{i,j} = B_{i,j} = M_{i,j} = 0\square$
Deuxième éventualité $i = \sigma(j)$ auquel cas $(1-\lambda)A_{i,j} + \lambda B_{i,j} = 1$ ou $(1-\lambda)(1-A_{i,j}) + \lambda(1-B_{i,j} = 0$.
Le même argument que pour la première situation (les coefficients d'une matrice bisochastique étant inférieurs à 1) donne cette fois $A_{i,j} = B_{i,j} = M_{i,j} = 1\square$
Bilan : $\boxed{A = B = M}$ et M est bien $\boxed{\text{extrémale dans } B_n}$$\blacksquare$

*Dans toute la suite de cette partie, on considère une matrice **bistochastique** $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ qui n'est **pas** une matrice de permutation.*

9. Montrer qu'il existe un entier $r > 0$ et deux familles $i_1, i_2, \ldots, i_r$ et $j_1, j_2, \ldots, j_r$ d'indices distincts dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que pour tous $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $A_{i_k,j_k} \in]0,1[$ et $A_{i_k,j_{k+1}} \in]0,1[$ avec $j_{r+1} = j_1$.
Solution :
Question pénible dont la solution n'apporte pas grand chose.
Comme A n'est pas une matrice de permutation il existe une ligne comportant deux termes dans $]0,1[$. Notons l_1 l'indice de cette ligne et k_1 et k_2 des indices différents tels que A_{l_1,k_1} et A_{l_1,k_2} appartiennent à $]0,1[$. Le caractère bistochastique de A implique qu'il existe $l_2 \neq l_1$ tel que A_{l_2,k_2} soit dans $]0,1[$.
Considérons alors un entier $s \geq 2$ maximal et deux suites d'entiers deux à deux différents $(l_1, ..., l_s)$ et $(k_1, ..., k_s)$ de sorte que :
$\forall i \in [\![1,s]\!]$, $A(l_i,k_i) \in]0,1[$ et $\forall i \in [\![1,s-1]\!]$, $A(l_i,k_{i+1}) \in]0,1[$.
Mais puisque $A_{l_s,k_s} \in]0,1[$, $k_{s+1} \neq k_s$ de sorte que $(A_{l_s,k_{s+1}} \in]0,1[$.
Si $k_{s+1} = k_p$, où $p \in [\![1,s-1]\!]$ alors les suites $(l_p, ..., l_s)$, $(k_p, ..., k_s)$ font l'affaire$\square$
Sinon on peut trouver $l_{s+1} \neq l_s$ tel que $(A_{l_{s+1},k_{s+1}} \in]0,1[$.
Pour ne pas contredire la maximalité de s, on a nécessairement $l_{s+1} = l_p$, où $p \in [\![1,s-1]\!]$.
On considère alors les suites $(l_s, ..., l_p)$ et $k_{s+1}, ..., k_{p+1}$ qui conviennent$\blacksquare$

10. En considérant la matrice $B = (B_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de $M_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$\begin{cases} B_{i_k,j_k} = 1 & k \in \{1,2,\ldots,r\} \\ B_{i_k,j_{k+1}} = -1 & k \in \{1,2,\ldots,r\} \\ B_{i,j} = 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$
montrer que A n'est pas un élément extrémal de B_n. En déduire l'ensemble des éléments extrémaux de B_n.

On dit qu'une matrice $M = (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de $M_n(\mathbb{R}^+)$, à coefficients positifs ou nuls, admet un *chemin strictement positif* s'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $M_{\sigma(1),1}M_{\sigma(2),2}\cdots M_{\sigma(n),n} > 0$.
On démontre par récurrence sur n, et on admet le résultat suivant : si M est à coefficients positifs ou nuls et si toute matrice extraite de M ayant p lignes et q colonnes avec $p+q = n+1$ n'est pas la matrice nulle, alors M admet un chemin strictement positif.

11. Montrer que A admet un chemin strictement positif.

On note σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $A_{\sigma(1),1}A_{\sigma(2),2}\cdots A_{\sigma(n),n} > 0$ et on pose $\lambda_0 = \min\limits_j \left(A_{\sigma(j),j}\right)$ et $A_0 = \dfrac{1}{1-\lambda_0}(A - \lambda_0 M_\sigma)$ où M_σ est la matrice de permutation associée à σ.

12. Montrer que A_0 est bien définie, et que c'est une matrice bistochastique contenant au moins un élément nul de plus que A.

13. En raisonnant par récurrence, démontrer que A s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices de permutation $M_0, M_1, \ldots, M_s$:
$$A = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_s M_s$$
où les coefficients λ_i sont tous strictement positifs et de somme $\sum\limits_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$.

14. Soit fy une forme linéaire de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf\limits_{M\in P_n} fy(M)$ existe. En déduire que $\inf\limits_{M\in B_n} fy(M)$ existe et est atteint en une matrice de permutation.

C Inégalité de Hoffman-Wielandt

Dans cette partie, on munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $< A, B >= Tr({}^tA \cdot B)$ et de la norme euclidienne associée notée $\|\cdot\|$. On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $O_n(\mathbb{R})$ celui des matrices orthogonales.

15. Montrer que pour tous $A \in M_n(\mathbb{R})$ et P, Q dans $O_n(\mathbb{R})$, on a $\|PAQ\| = \|A\|$.

*Dans la suite de cette partie, A et B désignent deux matrices **symétriques réelles**.*

16. Montrer qu'il existe deux matrices diagonales réelles D_A, D_B, et une matrice orthogonale $P = (P_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ telles que $\|A - B\|^2 = \|D_A P - P D_B\|^2$.

17. Montrer que la matrice R définie par $R_{i,j} = (P_{i,j})^2$ pour tous i, j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ est bistochastique et que
$$\|A - B\|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} R_{i,j} |\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2$$
où $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ désignent les valeurs propres de A et $\lambda_1(B), \ldots, \lambda_n(B)$ celles de B.

18. En déduire que
$$\min_{\sigma} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B)|^2 \leq \|A - B\|^2$$
où le minimum porte sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soit (Ω, Υ, P) un espace probabilisé et V l'ensemble des variables aléatoires définies sur cet espace admettant un moment d'ordre 2. Pour tout X de V , on note $X \sim P_X$ si X suit la loi P_X. Pour tout couple (P_1, P_2) de lois, on pose
$$d^2(P_1, P_2) = \inf_{\substack{X,Y\in V \\ X\sim P_1, Y\sim P_2}} E(|X - Y|^2).$$

Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux familles de réels. On note P_1 la loi uniforme sur $\{a_1, \ldots, a_n\}$ et P_2 la loi uniforme sur $\{b_1, \ldots, b_n\}$.

19. Montrer que
$$d^2(P_1, P_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |a(i) - b(i)|^2$$
où l'on a noté $a(1) \leq \cdots \leq a(n)$ et $b(1) \leq \cdots \leq b(n)$ les suites $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ ré-ordonnées par ordre croissant. En déduire que pour toutes matrices symétriques réelles A, B de valeurs propres respectives $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$, on a l'inégalité :
$$nd^2(P_1, P_2) \leq \|A - B\|^2.$$

Fin de Solution

10. Soit $a =$ le minimum des cœfficients construit dans la question 9), le nombre $a \in]0, 1[$, et $\forall i, j \in \{1, .., n\}$, $A_{i,j} - aB_{i,j}, A_{i,j} + aB_{i,j} \in \mathbb{R}^+$, de plus $(A - aB)V = V = (A + aB)V$, donc les deux matrices $A - aB$ et $A + aB$ sont bistochastiques, et on $\frac{1}{2}(A + aB) + \frac{1}{2}(A - aB) = A$ et $A + aB \neq A$, donc A n'est pas extrémal de $\mathcal{B}_n$.

les éléments de $\mathcal{P}_n$ sont des éléments extrémaux de $\mathcal{B}_n$ ceci d'après la question 8), et de cette question ce sont les seuls.

11. Si $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est une matrice extraite de A avec $p+q=n+1$. Si on suppose que $M=0$. quitte à réarranger les lignes et les colonnes de A, on peut supposer que M est constitué par les p premières lignes de A, et les q premières de A.

    Alors $\forall i \in \{1,...,p\}$ $\displaystyle\sum_{j=q+1}^{n} M_{i,j} = 1$, donc

    $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=q+1}^{n} M_{i,j} = p = \sum_{j=q+1}^{n}\sum_{i=1}^{p} M_{i,j} \leq \sum_{j=q+1}^{n}\sum_{i=1}^{n} M_{i,j} = n-q$, absurde avec $p+q=n+1$. Donc $M=0$.

12. Supposons que $\lambda_0 = 1$, alors $\forall j \in \{1,..,n\}$, $A_{\sigma(j)j} = 1$, la matrice contient sur chacune de ses colonnes un 1 c'est donc le seul et les autres termes de la colonne sont nuls car A est bistochastique. de même σ est une bijection donc $\{\sigma(1),...,\sigma(n)\} = \{1,...,n\}$, et puisque $\forall j \in \{1,...,n\}$, $A_{\sigma(j)j} = 1$ alors sur chaque ligne il y'a un seul 1, c'est donc le seul et les autres sont nuls, alors A est une matrice de permutation, absurde, conséquence $\lambda_0 \neq 1$.

    $\displaystyle\frac{1}{1-\lambda_0}(A-\lambda_0 M_\sigma)V = \frac{1}{1-\lambda_0}(AV-\lambda_0 M_\sigma V) = \frac{1}{1-\lambda_0}(V-\lambda_0 V) = V$

    et $\displaystyle\frac{1}{1-\lambda_0}({}^tA-\lambda_0^t M_\sigma)V = \frac{1}{1-\lambda_0}({}^tAV-\lambda_0^t M_\sigma V) = \frac{1}{1-\lambda_0}(V-\lambda_0 V) = V$

    $\forall i,j \in \{1,...,n\},\ A_{ij} - \lambda_0 (M_\sigma)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} \geq 0 & \text{si} \quad \sigma(j) \neq i \\ A_{\sigma(j)j} - \lambda_0 \geq 0 & \text{si} \quad \sigma(j) = i \end{cases}$

    On a $\forall i,j \in \{1,...,n\}$; $A_{ij} \in [0,1]$ et $A_{\sigma(1)1}....A_{\sigma(n)n} > 0$, donc $\lambda_0 \in]0,1[$. Conséquence A_0 est bistochastique.

    $\exists j_0 \in \{1,...,n\}$ tel que $\lambda_0 = A_{\sigma(j_0)j_0}$, alors $(A_0)_{\sigma(j_0)j_0} = 0$ car $(M_\sigma)_{\sigma(j_0)j_0} = 1$.

    Alors $A_{\sigma(j_0)j_0} \neq 0$ et $(A_0)_{\sigma(j_0)j_0} = 0$

    Or $(A_0)_{\sigma(j)j} = (A)_{\sigma(j)j} - \lambda_0 \geq 0$ et $(A)_{\sigma(j)j} > 0$.

    Si $\sigma(j) \neq i$, alors $(A_0)_{ij} = (A)_{ij}$. Donc A_0 a au moins un élément nul de plus que A.

13. D'après la question précédente il existe σ, qu'on va noter σ_0 tel que $A = \lambda_0 M_{\sigma_0} + (1-\lambda_0)A_0$, si $A_0 \in \mathcal{P}_n$, c'est terminer car les cœfficients $\lambda_0, (1-\lambda_0) \in]0,1[$ de somme 1.

    Si non on répète le même travail à la matrice A_0 qui peut donc s'écrire $\lambda_1 M_{\sigma_1} + (1-\lambda_1)A_1$, alors $A = \lambda_0 M_{\sigma_0} + (1-\lambda_0)\lambda_1 M_{\sigma_1} + (1-\lambda_0)(1-\lambda_1)A_1$, qui s'écrit $\lambda_0 M_{\sigma 0} + \lambda_1 M_{\sigma 1} + \lambda_2 A_2$ avec les $\lambda_i \in]0,1[$ de somme 1, avec $A_2 \in \mathcal{B}_n$ contient au moins deux 0 de plus que A, les cœfficients d'une matrice bistochastique sont en nombres finis le processus doit s'arrêter et il existe $M_0,...,M_s \in \mathcal{P}_n$ et des cœfficients $\lambda_0,...,\lambda_n \in]0,1[$ de sommes 1 tels que $A = \lambda_0 M_0 + ... + \lambda_s M_s$.

14. $\mathcal{P}_n$ est un ensemble fini de cardinal $n!$, c'est exactement le nombre de permutations des vecteurs colonnes de la matrice I_n. donc $\displaystyle\inf_{M\in\mathcal{P}_n} \varphi(M)$ existe, soit $B \in \mathcal{P}_n$ tel que $\displaystyle\inf_{M\in\mathcal{P}_n} \varphi(M) = \varphi(B)$.

    φ est une forme linéaire sur un espace de dimension finie donc elle est continue.

    $\mathcal{B}_n$ est un compact, et φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc φ est bornée et atteint ses bornes en particulier sa borne inférieur c'est à dire $\exists A \in \mathcal{B}_n$ tel que $\displaystyle\inf_{M\in\mathcal{B}_n} \varphi(M) = \varphi(A)$.

    On a $\displaystyle\inf_{M\in\mathcal{B}_n} \varphi(M) \leq \varphi(N)$ pour tout $N \in \mathcal{P}_n$.

    Donc si on suppose que $A \in \mathcal{B}_n \backslash \mathcal{P}_n$, alors $\displaystyle\inf_{M\in\mathcal{B}_n} \varphi(M) < \varphi(N)$ pour tout $N \in \mathcal{P}_n$, en particulier $\varphi(A) < \varphi(B)$ l'inégalité est stricte.

    Mais de la question précédente dont les conditions sont vérifiées, $A = \lambda_0 M_0 + ... + \lambda_s M_s$ les $M_i \in \mathcal{P}_n$, donc $\displaystyle\varphi(A) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi(M_i) \geq \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi(B) = \varphi(B)$

    Alors $\varphi(A) < \varphi(B)$ et $\varphi(B) \leq \varphi(A)$, absurde, donc $A \in \mathcal{P}_n$.

    Remarque: On a $A \in \mathcal{P}_n$ et $\displaystyle\varphi(A) = \inf_{M\in\mathcal{B}_n} \varphi(M) \leq \inf_{M\in\mathcal{P}_n} \varphi(M) \leq \varphi(A)$, donc:

    $$\inf_{M\in\mathcal{B}_n} \varphi(M) = \inf_{M\in\mathcal{P}_n} \varphi(M)$$

15. $\|PAQ\|^2 = ({}^tQ{}^tA{}^tPPAQ) = ({}^tQ{}^tAAQ) = (Q{}^tQ{}^tAA) = ({}^tAA) = \|A\|^2$, d'où l'égalité demandée.

16. les matrices A et B sont symétriques réelles donc orthogonalement diagonalisables $\exists R, S \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D_A, D_B deux matrices diagonales telles que $A = RD_A^t R$ et $B = SD_B^t S$, alors:

    $\|A - B\|^2 = \left\|RD_A^t R - SD_B^t S\right\|^2 = \left\|{}^tR(RD_A^t R - SD_B^t S)S\right\|$ question précédente.

    Donc $\|A - B\|^2 = \left\|D_A^t RS -{}^t RSD_B\right\|^2$. On prend $P = {}^tRS \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe et ${}^tR = R^{-1}$.

17. Tout d'abord le terme général $R_{i,j} = (P_{i,j})^2 \geq 0$ de R.

    Soit $i \in \{1, ..., n\}$, $\sum_{j=1}^{n} R_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (P_{i,j})^2 = 1$, car c'est la norme du i ème vecteur ligne de P qui est orthogonal.

    $\sum_{j=1}^{n} R_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} (P_{j,i})^2 = 1$, car c'est la norme du i ème vecteur colonne de P qui est orthogonal.

    Posons $D_A = (d_{i,j})$, alors $(D_A P)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} P_{k,j} = \lambda_i(A) P_{i,j}$, de même $(PD_B)_{i,j} = P_{i,j}\lambda_j(B)$.

    Or $\|A - B\|^2 = \sum_{i,j} (D_A P - PD_B)_{i,j}^2 = \sum_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2 P_{i,j}^2$. ici on a utiliser le résultat suivant $A = ({}^tAA) = \sum_{i,j} A_{i,j}^2$.

    Alors $\|A - B\|^2 = \sum_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2 R_{i,j}$.

18. On a $\sum_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2 R_{i,j} \geq \inf_{M \in \mathcal{B}_n} \sum_{i,j} M_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2$.

    En considérant φ la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par:

    $$\varphi(M) = \sum_{i,j} M_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2$$

    Par application de la question 14):

    $$\inf_{M \in \mathcal{B}_n} \sum_{i,j} M_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2 = \inf_{M \in \mathcal{P}_n} \sum_{i,j} M_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2$$

    Alors $\|A - B\|^2 \geq \min_{\sigma} \sum_{j=1}^{n} M_{\sigma(j)j} (\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B))^2$ car lorsque $\sigma(j) \neq i$, $M_{i,j} = 0$.

    Puisque $M_{\sigma(j)j} = 1$, alors: $\min_{\sigma} \sum_{j=1}^{n} (\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B))^2 \leq A - B^2$.

19. Du théorème de Transfert, $E(|X - Y|^2) = \sum_{i,j} (a_i - b_j)^2 P(X = a_i \bigcap Y = b_j)$

    On pose R la matrice carrée d'ordre n définie par $R_{i,j} = nP(X = a_i \bigcap Y = b_j) \geq 0$, de plus $\sum_{i=1}^{n} nP(X = a_i \bigcap Y = b_j) = nP(Y = b_j) = 1$ pour tout $j \in \{1, .., n\}$, et $\sum_{j=1}^{n} nP(X = a_i \bigcap Y = b_j) = nP(X = a_j) = 1$ pour tout $i \in \{1, .., n\}$, alors R est bistochastique. de la question 14), $\exists M_\sigma \in \mathcal{P}_n$ telle que:

    $\sum_{i,j} (a_i - b_j)^2 nP(X = a_i \bigcap Y = b_j) \geq \sum_{j=1}^{n} R_{\sigma(j)j} (a_{\sigma(j)} - b_j)^2 = \sum_{j} (a_{\sigma(j)} - b_j)^2$

    Alors

    $$E(|X - Y|^2) \geq \frac{1}{n} \sum_{j}^{n} (a_{\sigma(j)} - b_j)^2$$

Et puisque $(a_{(i)}-b_{(i)})^2+(a_{(i+1)}-b_{(i+1)})^2 = (a_{(i)}-b_{(i+1)})^2+(a_{(i+1)}-b_{(i)})^2+2(b_{(i)}-b_{(i+1)})(a_{(i+1)}-a_{(i)}) \leq (a_{(i)}-b_{(i+1)})^2+(a_{(i+1)}-b_{(i)})^2$
Alors

$$E(|X-Y|^2) \geq \frac{1}{n}\sum_{j}^{n}(a_{(j)}-b_{(j)})^2$$

conséquence $d^2(P_1,P_2) \geq \frac{1}{n}\sum_{j}^{n}(a_{(j)}-b_{(j)})^2$

D'autre part pour (X,Y) un couple de variable aléatoire dont la loi est donnée par $P(X = a_{(i)} \bigcap Y = b_{(j)}) = \frac{\delta_{i,j}}{n}$, en remarquant que $P(Y = b_{(j)}) = \sum_{i} \frac{\delta i, j}{n} = \frac{1}{n} = \sum_{j} \frac{\delta i, j}{n} = P(X = a_{(i)})$, alors $X \sim P_1$ et $Y \sim P_2$, et $E(|X-Y|^2) = \frac{1}{n}\sum_{j}^{n}(a_{(j)}-b_{(j)})^2$, alors $d^2(P_1,P_2) \leq \frac{1}{n}\sum_{j}^{n}(a_{(j)}-b_{(j)})^2$

Alors $d^2(P_1,P_2) = \frac{1}{n}\sum_{j}^{n}(a_{(j)}-b_{(j)})^2$

D'après la question 18), $\min_{\sigma}\sum_{j=1}^{n}|a_{\sigma(j)}-b_j|^2 \leq \|A-B\|^2$.

Qui s'écrit aussi $\min_{\sigma}\sum_{j=1}^{n}|a_{\sigma((j))}-b_{(j)}|^2 \leq \|A-B\|^2$.

Pour un choix d'une permutation on obtient $\sum_{j=1}^{n}|a_{(j)}-b_{(j)}|^2 \leq \|A-B\|^2$

Donc $nd^2(P_1,P_2) \leq \|A-B\|^2$