CCS — PSI — Mathématiques 2 — 2024 — corrigé

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

I. Convergence de la suite $(a_n)_n$

Q 1. Rappelons le développement limité $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$. On calcule alors

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{2(n+1)^2} \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

Par comparaison avec la série de Riemann d'exposant $2 > 1$, on en déduit la convergence de la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$.

Q 2. La comparaison suite - série assure que la suite $(a_n)_n$ est de même nature que la série de terme général $a_{n+1} - a_n$. Plus précisément, comme il y a convergence,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1} - a_k) = \gamma \qquad \therefore \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + a_n = \ln(n) + \gamma + \mathfrak{o}(1).$$

Notons (ce n'est pas demandé) qu'une comparaison série-intégrale permet de montrer que $\sum_{k=n}^{\infty}(a_{k+1} - a_k) \sim -\frac{1}{2n}$, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + a_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

II. Application au problème du collectionneur

Q 3. Pour obtenir une première figurine, il suffit d'acheter un paquet de céréales. Ainsi, $N_1 = \tau_1$ suit la loi certaine égale à 1.

Q 4. On a $C = \biguplus_{i=1}^{n} \bigcap_{k=1}^{m} C_k^{(i)}$, d'où

$$\mathbf{P}(C) \overset{\text{(incomp.)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m} C_k^{(i)}\right) \overset{\text{(indép.)}}{=} n \prod_{k=1}^{m} \mathbf{P}(C_k^{(i)}) = n \times \frac{1}{n^m} = \frac{1}{n^{m-1}}.$$

De plus, $(N_2 > m) = C$, d'où $\mathbf{P}(N_2 > m) = \frac{1}{n^{m-1}}$.

Q 5. Il est clair que $N_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

$$\forall k \in [\![2, +\infty[\![: \mathbf{P}(N_2 = k) = \mathbf{P}(N_2 > k-1) - \mathbf{P}(N_2 > k) = \frac{1}{n^{k-2}} - \frac{1}{n^{k-1}} = \frac{n-1}{n^{k-2}}.$$

Q 6. À la question précédente, on aurait pu voir directement que $\tau_2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{n-1}{n}\right)$. De même, $\tau_k \sim \mathcal{G}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$, temps d'attente d'une nouvelle image alors que l'on en possède déjà $k-1$.

Q 7. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(N_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(\tau_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} \underset{(i=n-k+1)}{=} n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \overset{\textbf{(Q2)}}{=} n\big[\ln(n) + \gamma + \mathfrak{o}(1)\big].$$

Q 8. Il est clair intuitivement que les v.a. $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ sont indépendantes vu qu'elles se rapportent à des achats qui le sont. Un peu plus formellement, ce qui n'apporte pas grand chose, conditionner par les valeurs prises par τ_1 à τ_p ne modifie pas la loi de τ_{p+1}, d'où l'indépendance par la formule des probabilités composées.

Q 9. Par indépendance, la variance est additive et l'on a

$$\mathbf{V}(N_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(\tau_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\left(\frac{n}{n-k+1}\right)^2 = n\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(n-k+1)^2} \leqslant n\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n-k+1)^2} \leqslant n^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{n^2\pi^2}{6}.$$

Q 10. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$\mathbf{P}\big(|N_n - \mathbf{E}(N_n)| > \varepsilon n \ln(n)\big) \leqslant \mathbf{P}\big(|N_n - \mathbf{E}(N_n)| \geqslant \varepsilon n \ln(n)\big) \leqslant \frac{\mathbf{V}(N_n)}{(\varepsilon n \ln(n))^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Q 11. On a $\big(|N_n - n\ln(n)| > n\ln(n)\big) \subset \big(|N_n - \mathbf{E}(N_n)| \geqslant 2\varepsilon n \ln(n)\big)$ dès que $|\mathbf{E}(N_n) - n\ln(n)| < \varepsilon n \ln n$, ce qui est vrai à partir d'un certain rang d'après la question **Q7**. La question présente se déduit donc de la précédente.

III. Une première expression intégrale de γ

Q 12. Par télescopage, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-(n+1)t}\right] = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-nt} = 1$ pour tout $t > 0$, d'où l'égalité en divisant par t.

Q 13. Pour $t > 0$, $0 < \mathrm{e}^{-t} < 1$, d'où $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t}$ et l'égalité attendue en soustrayant celle obtenue à la question précédente.

Q 14. Sous réserve de la validité de l'interversion série-intégrale,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t &\overset{(\mathbf{Q12}\ \&\ \mathbf{Q13})}{=} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t}\right]\mathrm{d}t \\ &\overset{(\text{interv.})}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t}\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right] \\ &\overset{(\mathbf{Q1})}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] = \lim a_n - a_1 + 1 \overset{(\mathbf{Q2})}{=} \gamma.\end{aligned}$$

Pour justifier l'interversion, notons que, par convexité de la fonction exponentielle, sa courbe est au-dessus de sa tangente en $t = 0$, d'où, pour tout réel t,

$$f_n(t) = \mathrm{e}^{-(n+1)t} - \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t} = \mathrm{e}^{-(n+1)t}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t} - (1-t)}{t}\right] \geqslant 0.$$

Le théorème d'interversion s'applique alors, la convergence de la série de terme général $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} |f_n| = \int_{\mathbb{R}_+} f_n$ donnant de surcroît la convergence de l'intégrale.

IV. Une deuxième expression intégrale de γ

Q 15. La fonction est polynomiale (sur $\mathbb{R}^*$) : en vertu de la formule du binôme de Newton,

$$\frac{1-(1-t)^n}{t} = \frac{1}{t}\left[1 - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^k\right] = -\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^{k-1} = \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\binom{n}{p+1}t^p.$$

Elle est donc *prolongeable par continuité* en 0, par la valeur $(-1)^0\displaystyle\binom{n}{1} = n$.

Q 16. En utilisant l'indication, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (1-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (1-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t \overset{(2)}{=} \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{1-(1-t)}\,\mathrm{d}t \overset{(3)}{=} \int_0^n \frac{1-(1-\frac{u}{n})^n}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = \int_0^n \frac{1-(1-\frac{u}{n})^n}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^n \frac{\mathrm{d}u}{u} \overset{(4)}{=} \int_0^1 \frac{1}{u}\Big(1-(1-\frac{u}{n})^n\Big)\,\mathrm{d}u - \int_1^n \frac{1}{u}\Big(1-\frac{u}{n}\Big)^n\,\mathrm{d}u.$$

(1) Linéarité de l'intégrale ;
(2) somme géométrique ;
(3) changement de variable affine $u = nt$;
(4) relation de Chasles et linéarité de l'intégrale.

Q 17. Question obscure et inutile.

Q 18. Par continuité de l'exponentielle, on peut passer à la limite et écrire

$$f_n(t) = \frac{1}{t}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \mathbb{1}_{[1,n]}(t) = \frac{1}{t}\exp\Big[n\ln\Big(1-\frac{t}{n}\Big)\Big]\mathbb{1}_{[1,n]}(t) = \frac{1}{t}\exp\big(-t+\mathfrak{o}(1)\big)\mathbb{1}_{[1,n]}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}.$$

Q 19. La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est concave et sa courbe est donc située sous sa tangente en $x=0$, soit $\ln(1+x) \leqslant x$, d'où $\ln(1-t) \leqslant -t$ en posant $x=-t$. Cette question aurait pu avantageusement figurer avant la question **Q14.**

Q 20. La fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u}u^{-1}$ est continue sur l'intervalle fermé $[1,+\infty[$. De plus, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-u}u^{-1} \underset{u\to+\infty}{=} \mathfrak{o}(\mathrm{e}^{-u})$, d'où la convergence de l'intégrale par comparaison avec celle de référence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

Q 21. Les fonctions f_n sont continues (y compris en n, même si c'est inutile car la continuité par morceaux suffirait) et nulles en dehors d'un segment, donc intégrables.

Q 22. Sous réserve d'application du théorème de convergence dominée,

$$\int_1^n \frac{1}{u}\Big(1-\frac{u}{n}\Big)^n\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

La limite simple est donnée par la question **Q18**. Le calcul ci-dessous donne la domination par croissance de l'exponentielle

$$0 \leqslant f_n(u) \overset{\textbf{(Q18)}}{=} \frac{1}{u}\exp\Big[n\ln\Big(1-\frac{u}{n}\Big)\Big] \overset{\textbf{(Q19)}}{\leqslant} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \overset{\textbf{(Q20)}}{\in} \mathcal{L}^1\big([1,+\infty[\big).$$

Q 23. La fonction $u \longmapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$, faussement impropre, est convergente.

Q 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $g_n(t) = \Big(1-\dfrac{t}{n}\Big)^n$. La fonction est dérivable et $g_n'(t) = -(1-t)^{n-1} \in [-1,0]$ pour $t \in [0,1]$. En divisant par $-t<0$, l'inégalité des accroissements finis donne

$$t\times(-1) \leqslant g(t)-g(0) \leqslant t\times 0 \qquad \therefore \qquad 0 \leqslant \frac{1}{t}\Big[1-\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n\Big] \leqslant 1.$$

Q 25. On applique à nouveau le théorème de convergence dominée. La question précédente donne une domination intégrable de la suite de fonctions intégrées. Le calcul de la limite simple a par ailleurs déjà été fait. Il vient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{u}\Big[1-\Big(1-\frac{u}{n}\Big)^n\Big]\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Q 26. On peut faire le bilan de cette partie :

$$a_n \overset{\textbf{(Q16)}}{=} \int_0^1 \frac{1}{u}\Big(1-(1-\frac{u}{n})^n\Big)\,\mathrm{d}u - \int_1^n \frac{1}{u}\Big(1-\frac{u}{n}\Big)^n\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{\textbf{(Q2, Q22 \& Q25)}} \gamma = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

V. Deux autres expressions intégrales de γ

Soient $u\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\end{array}\right.$ et, sous réserve de convergence $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Q 27. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quand t tend vers 0, $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \sim t^{x-1}$, donc $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > 0$. Par croissances comparées, $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathfrak{o}(\mathrm{e}^{-t/2})$ quand t tend vers l'infini, donc $\displaystyle\int_1^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout x. Ainsi, $\mathcal{D}_\Gamma = \mathbb{R}_+^*$.

Q 28. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

i) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \longmapsto u(x,t)$ est continue (p.m.) sur $]0,+\infty[$.

ii) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \longmapsto u(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

iii) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue (p.m.) sur $\mathbb{R}_+^*$.

iv) La domination est délicate car $x \longmapsto t^{x-1} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}$ est décroissante pour $0 < t \leqslant 1$ et croissante pour $t \geqslant 1$. Il vient

$$\forall 0 < a \leqslant x \leqslant b < +\infty,\ \forall t > 0\colon \left|\ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant |\ln(t)|t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\mathbb{1}_{]0,1]}(t) + \ln(t)t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}\mathbb{1}_{]1,+\infty]}(t) = h_{a,b}(t).$$

Pour montrer que $h_{a,b}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on note que

$$|\ln t|t^{a-1} = \big(|\ln t|t^{a/2}\big)t^{a/2-1} \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{=} \mathfrak{o}(t^{a/2-1})$$

avec $a/2 - 1 > -1$, d'où l'intégrabilité en 0. Par ailleurs,

$$\ln(t)t^{b-1}\mathrm{e}^{-t} = \frac{\ln(t)}{t} \times t^b\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathfrak{o}(t^b\mathrm{e}^{-t}) = \mathfrak{o}(t^{-2})$$

d'où l'intégrabilité en l'infini, ce qui achève de montrer que Γ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x > 0$, $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q 29. Une intégration par parties avec $u(t) = t^x$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ donne, le crochet ayant 0 pour limite,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \big[-t^x\mathrm{e}^{-t}\big]_0^{t\to\infty} + \int_0^{\infty} xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

On admet la formule de Weierstraß :

(W) $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\colon \frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x/n}\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Q 30. Les membres de la formule de Weierstraß sont strictement positifs. On peut donc en prendre le logarithme et le dériver (dérivation logarithmique). Sous réserve de validation de la dérivation, il vient alors

$$-\ln\big(\Gamma(x)\big) = \ln x + \gamma x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{x}{n} + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right]$$
$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n} + \frac{1}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right] = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right).$$

La validité de la première opération est justifiée par la continuité du logarithme qui permet de transformer le produit infini en série. La deuxième opération consiste alors à dériver terme à terme la série de fonctions définie par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right]$.

Cette série converge simplement sur $\mathbb{R}_+$... parce qu'elle est obtenue à partir de la formule de Weierstraß dont le produit infini est donc censé converger ; il est facile de le vérifier directement car $\dfrac{x}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) = x(a_n - a_{n-1})$

avec les notations de la première question, où l'on avait prouvé la convergence de la série $\sum(a_n - a_{n-1})$. De plus, le terme général de la série dérivée est

$$0 \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} = \frac{x}{n(x+n)} \leqslant \frac{b}{n^2}$$

si $0 < x \leqslant b$, d'où la convergence normale (donc uniforme) de cette série sur tout intervalle de la forme $]0, b]$. Cela valant pour tout $b > 0$, la justification de l'opération de dérivation est achevée.

Q 31. En particulier, pour $x = 1$ (resp. $x = 2$), on calcule $\Gamma(2) \overset{\textbf{(Q29)}}{=} \Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^0 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$ et il vient

$$\Gamma'(1) = -1 - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = -\gamma$$

$$\Gamma'(2) = -\frac{1}{2} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = -\frac{1}{2} - \gamma + 1 + \frac{1}{2} = 1 - \gamma.$$

Q 32. On effectue le changement de variable $t = -\ln(u)$ dans l'intégrale donnant $\Gamma'(1)$, ce qui donne

$$-\gamma = \Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_1^0 \ln\big(-\ln(u)\big)(-\,\mathrm{d}u) \qquad \therefore \qquad \gamma = -\int_0^1 \ln\big(-\ln(u)\big)\,\mathrm{d}u.$$

VI. Recherche d'une valeur approchée de γ

Q 33. On part de l'expression obtenue à la question **Q26** et l'on utilise la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^A \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_A^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^A \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^A \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_1^A \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln(A) + \int_0^A \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Q 34. Le développement en série entière de l'exponentielle est de rayon de convergence infini. Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u} = \frac{1}{u}\left[1 - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^k}{k!}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}u^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}u^k.$$

Le rayon de convergence étant à nouveau infini et la fonction prolongée par continuité en 0, on peut intégrer la série entière terme à terme sur $[0, A]$, d'où

$$\int_0^A \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^A \frac{(-1)^k}{(k+1)!}u^k\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!}.$$

Q 35. Les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, +\infty[$. L'intégrale de départ est convergente d'après **Q20** et l'existence d'une limite finie du crochet garantit la validité de l'intégration par parties, que l'on réalise en dérivant $1/u$.

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \times \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\right]_x^{u\to+\infty} - \int_x^{+\infty}(-\mathrm{e}^{-u})\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Q 36. Une deuxième intégration par parties, puis une troisième, réalisées dans le même sens (intégration de e^{-u}) donnent la forme demandée avec $R = X^2 - X + 2$:

$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-u} \times \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2} - 2\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^3}\,\mathrm{d}u\right)$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2} + 2\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3} - 6\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^4}\,\mathrm{d}u = \frac{(x^2 - x + 2)\mathrm{e}^{-x}}{x^3} - 6\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^4}\,\mathrm{d}u.$$

Q 37. Reprenons les résultats des questions de cette partie (il y a une erreur de signe dans l'énoncé).

$$\gamma + \ln(A) \overset{(\mathbf{Q33})}{=} \int_0^A \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \overset{(\mathbf{Q34\ \&\ Q36})}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!} - \frac{R(A)\mathrm{e}^{-A}}{A^3} + 6\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^4}\,\mathrm{d}u$$

$$\therefore \qquad \gamma + \ln(A) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!} + \frac{R(A)\mathrm{e}^{-A}}{A^3} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!} + 6\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^4}\,\mathrm{d}u \qquad \therefore$$

$$\left|\gamma + \ln(A) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!} + \frac{R(A)\mathrm{e}^{-A}}{A^3}\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!}\right| + 6\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^4}\,\mathrm{d}u$$

La série à majorer est une série alternée. Pour $u_k = \dfrac{A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!}$, on a $\dfrac{u_k}{u_{k-1}} = \dfrac{Ak}{(k+1)^2} < \dfrac{A}{k+1} \leqslant 1$ pour tout k tel que $A \leqslant k+1$. On peut appliquer la majoration classique du reste des séries alternées si $(u_k)_{k\geqslant n+1}$ est décroissante, ce qui est le cas si $A \leqslant n+2$, soit $n > A-1$. Il vient

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!}\right| + 6\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^4}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{A^{n+2}}{(n+2)(n+2)!} + 6\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{A^4}\,\mathrm{d}u = \frac{A^{n+2}}{(n+2)(n+2)!} + \frac{6\mathrm{e}^{-A}}{A^4}.$$

VII. Étude d'une série entière aux bornes de son intervalle ouvert de convergence

A. Rayon de convergence et première expression de la somme

Q 38. Pour tout $x > 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)\,x^{n+1}}{\ln(n)\,x^n} = x$. La règle de d'Alembert montre alors que la série entière converge absolument pour $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$, ce qui donne un rayon de convergence de 1. Pour $x = \pm 1$, le terme général de la série est divergent, donc la série l'est également. Finalement, $\mathcal{D}_f =]-1, 1[$.

B. Étude de f en 1

Q 39. Comme série de fonctions croissantes positives sur $[0,1[$, la fonction f est croissante positive sur $[0,1[$ et admet donc une limite dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Alors,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*\colon f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \ln(n)x^n \qquad \therefore \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) \geqslant \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=1}^{N} \ln(n)x^n = \sum_{n=1}^{N} \ln(n).$$

On peut ensuite faire tendre N vers l'infini, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$.

Q 40. On a vu à la question **Q2** que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$. Il s'ensuit que la série entière définissant g a le même rayon de convergence que celle définissant f, soit 1. Notons que l'on a aussi $\mathcal{D}_g =]-1, 1[$, la série divergeant pour $x = \pm 1$.

Q 41. Posons $a_k = \begin{cases} 1/k & \text{si } k \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$. Alors,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \times 1\right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = -\ln(1-x) \times \frac{1}{1-x} = \frac{\ln(1-x)}{x+1}.$$

Le produit des deux séries entières de rayon de convergence 1 donne une une série entière de rayon de convergence au moins 1 ; l'identité ci-dessus est donc valable pour tout $x\,]-1, 1[$.

Q 42. Pour $-1 < x < 1$, on a $f(x) - g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ avec $u_n = \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Or, on a vu à la question **Q2** que $u = (u_n)_n$ est convergente. Elle est donc bornée, d'où

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \sum_{n=1} \|u\|_\infty x^n \leqslant \|u\|_\infty \sum_{n=0} x^n = \frac{\|u\|_\infty}{1-x}.$$

Q 43. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ln(1-x) = -\infty$, on a $f(x) - g(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{=} \mathfrak{o}\big(g(x)\big)$, soit $f(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} g(x)$.

C. Étude de f en -1

On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $\begin{cases} c_1 = -1 \\ \forall n \in [\![2, +\infty[\![\colon c_n = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}. \end{cases}$

Q 44. Avec les notations et le résultat de Q 1, $c_n = a_{n-1} - a_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$ pour tout $n \geqslant 2$. En particulier, $c_{n+1} \sim c_n$. Il s'ensuit que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} c_n x^n$ a pour rayon de convergence 1 et qu'elle converge normalement sur le segment $[-1, 1]$ par comparaison avec la série de Riemann d'exposant 2. Son domaine de définition *réel* est donc $[-1, 1]$.

Q 45. Par la question **Q2**, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} - a_n) = -1 - \lim a_n + a_1 = -\gamma.$$

Q 46. La fonction h est continue sur $[-1, 1]$, et en particulier en 1 (en fait, on va s'en servir en -1), du fait de la convergence normale de la série sur $[-1, 1]$, établie à la question **Q44**, laquelle entraîne la convergence uniforme.

Q 47. On calcule

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p} (-1)^k c_k &= \sum_{k=2}^{2p} (-1)^{k-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{j=1}^{p-1} \left[-\ln\left(1 - \frac{1}{2j}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{2j+1}\right)\right] + (-1)^{2p-1} \ln\left(1 - \frac{1}{2p}\right) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{j=1}^{p-1} \ln\left(\frac{2j}{2j-1} \times \frac{2j}{2j+1}\right) + \ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \ln\left(\frac{2^2 \times 4^2 \times \cdots \times (2(p-1))^2}{1 \times 3^2 \times 5^2 \cdots \times (2p-3)^2 \times (2p-1)} \times \frac{2p}{2p-1}\right) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \ln\left(\frac{(2^p p!)^2}{2p} \times \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!^2}\right) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln\left(\frac{2^{4p}\, p!^4}{2p\,(2p)!^2}\right) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.
\end{aligned}$$

Q 48. Commençons par exprimer f en fonction de h. Pour $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n &= -\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \big[\ln(n) - \ln(n-1)\big] x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= \sum_{n=1 \text{ ou } 2}^{\infty} \ln(n) x^n - x \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = (1-x) f(x) + \ln(1-x),
\end{aligned}$$

soit $f(x) = \dfrac{h(x) - \ln(1-x)}{1-x}$. Par ailleurs, la formule de Stirling donne

$$\frac{2^{4p}\, p!^4}{2p\,(2p)!^2} = 2^{4p} \left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^{4p} (2\pi p)^2 \times \frac{1}{2p} \left(\frac{\mathrm{e}}{2p}\right)^{2p\times 2} \frac{1}{2\pi \times 2p} = \frac{\pi}{2}.$$

Il s'ensuit $\lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k c_k = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \ln(2)$. Comme $\lim c_k = 0$, on en déduit que

$$h(-1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \ln(2).$$

Enfin, la continuité de h en -1 et la relation entre f et h obtenue au début de cette question donnent

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \frac{h(-1) - \ln(2)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$$