X-ENS PSI 2018 : Corrigé partiel précédé d'une mise au point sur les équations différentielles

1 Equations différentielles linéaires d'ordre 2

1.1 Généralités

On se donne I un intervalle non trivial , a, b, c, d des éléments de $C(I, \mathbb{K})$ et on considère :
(E) : $ay'' + by' + cy = d$ ainsi que (E') : $ay'' + by' + cy = 0$
(E) est une équation différentielle linéaire d'ordre deux et (E') désigne l'équation homogène associée.
On note $S_I(E)$ l'ensemble des solutions sur I de (E) qui peut être vide (par exemple pour $x^2y'' + y' \sin x + y \ln(1+x) = chx$ sur $I =]-1, +\infty[$, prendre $x = 0$).
Voici les faits élémentaires essentiels :
Proposition
i) $S_I(E')$ est un sev de $D^2(I, \mathbb{K})$ (d'où le qualificatif de linéaire).
ii) Si $\varphi \in S_I(E)$ alors (principe de superposition , cf équations linéaires d'ordre un) :
$\boxed{S_I(E) = \varphi + S_I(E')}$.

1.2 Problème de Cauchy pour l'équation (E)

On suppose désormais que a ne s'annule pas sur I afin d'éviter des désagréments comme dans l'exemple précédent.
On admet et vous pourrez être amené à l'admettre dans un sujet de concours le théorème suivant :
Théorème :
Soit $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K}^2$: il existe une et une seule solution φ (sur I) de (E) telle que $\begin{cases} \varphi(t_0) = y_0 \\ \varphi'(t_0) = y_0' \end{cases}$.
Corollaire :
i) (E) a donc au moins une solution.
ii) $S_I(E')$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 2 (car isomorphe à $\mathbb{K}^2$ par le théorème admis).

Dans le sujet qui suit on utilisera librement ces résultats (au programme en 2018).

Les parties 1,2 et 5 sont indépendantes. Les parties 3 et 4 nécessitent d'utiliser certains résultats établis dans les parties 1 et 2.

2 Existence et unicité des solutions de (1)

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le problème

$$\begin{cases} -v_\lambda''(x) + c(x)v_\lambda(x) = f(x), \ x \in [0,1] \\ v_\lambda(0) = 0 \\ v_\lambda'(0) = \lambda \end{cases} \tag{1bis}$$

   admet une unique solution $v_\lambda \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, v_λ peut s'exprimer sous la forme :

$$v_\lambda = \lambda w_1 + w_2$$

   avec $w_1 \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ l'unique solution du système

$$\begin{cases} -w_1''(x) + c(x)w_1(x) = 0, \ x \in [0,1] \\ w_1(0) = 0 \\ w_1'(0) = 1 \end{cases}$$

et w_2 une fonction indépendante de λ à caractériser.

3. Montrer que $w_1(1) \neq 0$.
4. En déduire qu'il existe une solution $u \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ du problème (1). Montrer que cette solution est unique.
5. Montrer que si f est positive, alors u est également positive.

Solution :
1) Résulte immédiatement du préambule sur les équations différentielles figurant ci-dessus$\blacksquare$
2) Considérons w_2 comme étant l'unique solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} -v''_\lambda(x) + c(x)v_\lambda(x) = f(x), \ x \in [0,1] \\ v_\lambda(0) = 0 \\ v'_\lambda(0) = 0 \end{array} \right. \qquad (1ter)$$

Il est alors évident de vérifier que $w_2 + \lambda w_1$ est aussi solution de $(1bis)$ donc, par unicité à ce problème de Cauchy, on a bien $\boxed{v_\lambda = \lambda w_1 + w_2}$$\blacksquare$
3) On raisonne par l'aburde et on note $J = \{x \in]0,1], w_1(x) = 0\}$. Cet ensemble étant non vide et minoré possède une borne inférieure notée a.
De $w_1(0) = 0$ et $w'_1(0) > 0$, on déduit que w_1 est strictement positive sur un intervalle du type $]0, b]$ et prouve que $a > 0$. Par ailleurs par continuité de f, J est fermé donc $a \in J$ donc $w_1(a) = 0$ et $w_1 > 0$ sur $]0, a[$ (pour ne pas contredire la minimalité de a) or $w''_1 = cw_1 \geq 0$ sur $[0, a]$ autrement dit sur cet intervalle w_1 est convexe donc cette partie de son graphe est au dessous de la corde joignant l'origine au point $(a, 0)$. Ce qui implique que $w_1 \leq 0$ sur $]0, a[$. Contradiction$\blacksquare$
4) Pour $\lambda = -\frac{w_2(1)}{w_1(1)}$ v_λ est solution de (1).
Inversement une solution de (1) est nécessairement solution d'un problème $(1bis)$ pour un certain λ et, par simple évaluation en 1, on retrouve la valeur donnée précédemment$\blacksquare$
5) Raisonnons à nouveau par l'absurde en considérant t_1 un point de $[0,1]$ en lequel f présente un minimum (global) strictement négatif et posons $t_0 = max\{x \in [0, t_1] | f(x) \geq 0\}$.
Pour tout $t \in]t_0, t_1]$, nous avons $u(t) < 0$ donc $u''(t) = -f(t) + c(t)u(t) \leq 0$. Ainsi u' décroît sur $[t_0, t_1]$ alors que (puisque $t_1 \in]0,1[$) $u'(t_1) = 0$, ce qui implique la croissance de u (par positivité de la dérivée) sur $[t_0, t_1]$ ABSURDE$\blacksquare$

3 Une matrice de discrétisation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère A_n la matrice carrée de taille n, constante par diagonale :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Soit $V = {}^t(v_1, \dots, v_n)$ un vecteur propre de A_n associé à une valeur propre complexe λ. Montrer que λ est nécessairement réelle et que les composantes v_i de V vérifient la relation :

$$v_{i+1} - (2 - \lambda)v_i + v_{i-1} = 0, \ 1 \leq i \leq n$$

où on pose $v_0 = v_{n+1} = 0$.

7. Montrer que toute valeur propre de A_n est dans l'intervalle $]0,4[$.
8. Soit λ une valeur propre de A_n.
   (a) Montrer que les racines complexes r_1, r_2 du polynôme
   $$P(r) = r^2 - (2-\lambda)r + 1$$
   sont distinctes et conjuguées.
   (b) On pose $r_1 = \overline{r_2} = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   Montrer qu'on a nécessairement $\sin((n+1)\theta) = 0$ et $\rho = 1$.
9. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A_n ainsi qu'une base de vecteurs propres.
10. On considère la famille de matrices $B = [b_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les trois propriétés suivantes (appelées M-matrices) :
   $$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \quad \begin{cases} b_{i,i} > 0 \\ b_{i,j} \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad j \neq i \\ \sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j} > 0 \end{cases}$$
   Montrer que si B est une M-matrice, alors on a
   (a) B est inversible
   (b) Si $F = {}^t(f_1,\ldots,f_n)$ a des coordonnées toutes positives, alors $B^{-1}F$ aussi,
   (c) tous les coefficients de B^{-1} sont positifs.
11. En appliquant les résultats précédents à $A_n + \varepsilon I_n$ avec $\varepsilon > 0$, montrer que tous les coefficients de A_n^{-1} sont positifs.

Solution :
9) On a démontré que $Sp(A_n) \subset \{2(1-\cos(\frac{k\pi}{n+1})), k \in [\![0, n+1]\!]\}$ mais on sait aussi que ce spectre est inclus dans $]0,4[$, on dispose donc de l'inclusion plus fine $\boxed{Sp(A_n) \subset \{2(1-\cos(\frac{k\pi}{n+1})), k \in [\![1, n]\!]\}}$.
Par ailleurs et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ (cf ce qui a été fait en classe) en posant $v_i = \sin(\frac{ik\pi}{n+1})$) (pour $k \in [\![1,n]\!]$), le vecteur $V_k = {}^t(v_1,\ldots,v_n)$ vérifie $A_nV_k = 2(1-\cos(\frac{k\pi}{n+1}))v_k$, ce qui montre l'inclusion inverse et donne le spectre ; de plus $V_1,...,V_n$) constitue une base de vecteurs propres■
10)a) Par l'absurde en se donnant $X = {}^t(x_1,\ldots,x_n)$ non nul et dans $Ker(B)$. Soit i tel que $|x_i| = \|x\|_\infty$, on considère la i-ième ligne de l'égalité matricielle $BX = 0_{n,1}$:
$b_{i,i}x_i = -\sum_{j\neq i} b_{i,j}x_j \Longrightarrow b_{i,i} \leq \sum_{j\neq i} |b_{i,j}|\frac{|x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{j\neq i} |b_{i,j}|$ (par inégalité triangulaire et définition de $\|x\|_\infty$). Cette dernière majoration rentre en conflit avec $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j} > 0$■
b)Posons $G = B^{-1}F = {}^t(g_1,\ldots,g_n)$ et considérons un indice i tel que g_i soit minimal ; pour $j \neq i$ $b_{i,j}g_j \leq b_{i,j}f_i$ (car $B_{i,j} \leq 0$) donc $\sum_{j=1}^n b_{i,j}g_j \leq (\sum_{j=1}^n b_{i,j})g_i$. Cette inégalité s'écrit aussi $f_i \leq (\sum_{j=1}^n b_{i,j})g_i$; la positivité de f_i, la stricte positivité de $\sum_{j=1}^n b_{i,j}$ entraînent la positivité de g_i donc celles de toutes les composantes de G■
c) Il suffit d'appliquer la question précédente à F colonne canonique quelconque■
11) Pour tout $\epsilon > 0$, $A(\epsilon) = A_n + \varepsilon I_n$ est une M- matrice et si $\epsilon \to 0$, $A(\epsilon) \to A_n$. Il va donc nous suffire (par propriétés limite/produit matriciel et conservation des inégalités à la limite) de prouver que, dans le même contexte, $A(\epsilon)^{-1} \to A_n^{-1}$ (**)
Pour cela considérons P le polynôme caractéristique de A_n pour lequel on note ($0 \notin Sp(A_n)$) que $P(0) \neq 0$.
Par Cayley-Hamilton $P(A) = 0_n$ soit aussi $P(A(\epsilon) - \epsilon I_n) = 0_n$. Ainsi $P(X-\epsilon)$ est un polynôme annulateur de $A(\epsilon)$ et, par Taylor polynomial, $P(X-\epsilon) = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}(\epsilon)\frac{X^k}{k!}$ (on a posé $Q(X) = P(-X)$.
De ceci nous tirons que $P(0)I_n = A(\epsilon)(-\sum_{k=1}^n Q^{(k)}(\epsilon)\frac{A(\epsilon)^{k_1}}{k!}$ et, enfin, que :

$\boxed{A(\epsilon)^{-1} = -\sum_{k=1}^{n} Q^{(k)}(\epsilon)\frac{A(\epsilon)^{k-1}}{k!P(0)}}$ (cette formule étant valable pour $\epsilon = 0$). De là on tire aisément (**)■

4 Une suite d'approximations de la solution de (1)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note $h = \frac{1}{n+1}$ et on considère les réels $(x_i)_{0 \le i \le n+1}$ définis par $x_i = ih$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n+1\}$.

12. Montrer que pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^4([0,1], \mathbb{R})$, il existe une constante $C \ge 0$, indépendante de n, telle que
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ |v''(x_i) - \frac{1}{h^2}(v(x_{i+1}) + v(x_{i-1}) - 2v(x_i))| \le Ch^2$$
13. Montrer qu'il existe une unique famille de réels $(u_i)_{0 \le i \le n+1}$ vérifiant
$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) + c(x_i)u_i = f(x_i), \quad \text{pour} \quad 1 \le i \le n \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$
14. On suppose (dans cette question seulement) que $c(x) = 0$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$. On note u la solution exacte du problème (1). Montrer que pour tout $i \in \{0, \ldots, n+1\}$, on a
$$u_i = u(x_i) = \frac{1}{2}x_i(1 - x_i)$$
15. Montrer que si f est positive, alors $u_i \ge 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n+1\}$.

5 Un premier résultat de convergence

Dans toute cette partie, on supposera de plus que $c \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ et que $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ (c est toujours positive également).

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'application N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par la relation :
$$N(A) = \sup\{\|Ax\|_\infty,\ \|x\|_\infty \le 1\}$$
Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que si $A = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$, alors
$$N(A) = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$
17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    (a) En utilisant les résultats des questions 14 et 15, montrer que pour la matrice A_n définie au début de la partie 2, on a :
    $$N(((n+1)^2 A_n)^{-1}) \le \frac{1}{8}$$
    (b) En déduire que pour toute matrice diagonale $D_n = [d_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ telle que $d_{i,i} \ge 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a également
    $$N(((n+1)^2 A_n + D_n)^{-1}) \le \frac{1}{8}$$
18. Soit u l'unique solution du problème (1) et $(u_i)_{0 \le i \le n+1}$ la famille définie par la relation (2) pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une constante $\tilde{C} > 0$, indépendante de n, telle que
$$\max_{0 \le i \le n+1} |u(x_i) - u_i| \le \frac{\tilde{C}}{n^2}$$
Indication : on pourra introduire le vecteur $X = {}^t(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *où on a posé* $\varepsilon_i = u(x_i) - u_i$ *et calculer* $A_n X$.

6 Un second résultat de convergence

On suppose dans cette partie que $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ est telle que :

$$\exists \alpha \in]0,1],\ \exists K \geq 0,\ \forall (y,z) \in [0,1]^2,\ |f(y) - f(z)| \leq K|y-z|^\alpha$$

On suppose également que :

$$\forall x \in [0,1],\ c(x) = 0$$

On note u la solution associée au système (1).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les deux polynômes :

$$B_n f(X) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

$$\hat{B}_{n+1} u(X) = \sum_{k=0}^{n} u_k \binom{n+1}{k} X^k (1-X)^{n+1-k}$$

où $u_0, \dots, u_n$ sont solutions du système (2), avec $c = 0$.

19. Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre x. on pose

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

   (a) Exprimer $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$ et $\mathbb{E}(f(S_n))$ en fonction de x, n et du polynôme $B_n f$.

   (b) En déduire les inégalités :

$$\sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \mathbb{V}(S_n)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

20. Montrer que $\lambda^\alpha \leq 1 + \lambda$ pour tout réel $\lambda > 0$ et en déduire l'inégalité :

$$\left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \leq n^{-\alpha/2} \left(1 + \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \right)$$

   pour tous $x \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, n\}$.

21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{3K}{2} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

   Indication : On pourra dans un premier temps exprimer $f(x) - B_n f(x)$ en fonction de $\mathbb{E}(f(x) - f(S_n))$.

22. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0,1[$ on a :

$$(\hat{B}_{n+1} u)''(x) = -\frac{n}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n-1} f\left(\frac{\ell+1}{n+1}\right) \binom{n-1}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-1-\ell}$$

23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$. On pose $\chi_{n+1} = \hat{B}_{n+1} u - u$.

   (a) Montrer que

$$\|\chi''_{n+1}\|_\infty \leq \|f - B_{n-1} f\|_\infty + \frac{1}{n+1} \|f\|_\infty + K \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

(b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ il existe $\xi \in [0,1]$ tel que

$$\chi_{n+1}(x) = -\frac{1}{2}x(1-x)\chi''_{n+1}(\xi)$$

Indication : on pourra pour $x \in]0,1[$ considérer la fonction

$$h(t) = \chi_{n+1}(t) - \frac{\chi_{n+1}(x)}{x(1-x)}t(1-t),\ t \in [0,1]$$

24. En déduire qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|u - \hat{B}_{n+1}u\|_\infty \leq \frac{M}{n^{\alpha/2}}$$

Fin de solution :

12)Par égalité de Taylor avec reste intégrale,

$$v(x_{i+1}) = \sum_{k=0}^{3} \frac{h^k}{k!} v^{(k)}(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1}-t)^3}{6} v^{(4)}(t)\ dt$$

$$v(x_{i-1}) = \sum_{k=0}^{3} \frac{(-h)^k}{k!} v^{(k)}(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i-1}} \frac{(x_{i-1}-t)^3}{6} v^{(4)}(t)\ dt$$

On fait la différence de ces égalités. Les termes pour $k=1$ et $k=3$ s'éliminent et il reste

$$v(x_{i+1}) + v(x_{i-1}) = 2v(x_i) + h^2 v''(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1}-t)^3}{6} v^{(4)}(t)\ dt + \int_{x_i}^{x_{i-1}} \frac{(x_{i-1}-t)^3}{6} v^{(4)}(t)\ dt$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |v(x_{i+1}) + v(x_{i-1}) - 2v(x_i) - h^2 v''(x_i)| &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1}-t)^3}{6} |v^{(4)}(t)|\ dt + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(t-x_{i-1})^3}{6} |v^{(4)}(t)|\ dt \\ &\leq \frac{\|v^{(4)}\|_\infty}{6} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-t)^3\ dt + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t-x_{i-1})^3\ dt \right) \\ &\leq \frac{\|v^{(4)}\|_\infty}{6}(h^4 + h^4) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall i \in \{1,\dots,n\},\ |v''(x_i) - \tfrac{1}{h^2}(v(x_{i+1}) + v(x_{i-1}) - 2v(x_i))| \leq Ch^2 \text{ avec } C = \tfrac{\|v^{(4)}\|_\infty}{3}}$$

Bien sûr, $\|v^{(4)}\|_\infty$ existe car on a supposé que $v \in \mathcal{C}^4([0,1])$■
12) Les relations (2) équivalent à l'équation matricielle

$$\left(\frac{1}{h^2}A_n + \mathrm{diag}(c(x_1),\dots,c(x_n))\right)U = F \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc de montrer que $B_n(h) = \frac{1}{h^2}A_n + \mathrm{diag}(c(x_1),\dots,c(x_n))$ est inversible.
Reprenons le calcul de la question 7 et considérons λ une valeur propre de $h^2 B_n$ et V un vecteur propre associé. Notons v_i une coordonnée maximale en module (et posons $v_0 = v_{n+1} = 0$). On a alors

$$|2 + h^2 c_i(x) - \lambda|.|v_i| \leq |v_{i+1}| + |v_{i-1}| \leq 2|v_i|$$

On en déduit que $\lambda \geq h^2 c_i(x)$.
Si $c_i(x) > 0$ alors $\lambda > 0$ et $h^2 B_n$ est inversible puisque 0 n'est pas valeur propre.
Sinon, supposons par l'absurde que $\lambda = 0$. On a alors $\lambda = h^2 c_i(x) = 0$ (puisque $c_i(x) \geq 0$). Le même raisonnement qu'en 7 montre que $V = 0$ et donne une contradiction.
La matrice $B_n(h)$ est ainsi inversible (comme $h^2 B_n(h)$) et

$$\boxed{\text{(2) admet une unique solution}}$$

■

14) L'équation (1) s'écrit $u'' = -1$ et il existe donc des constantes c, d telles que $\forall x,\ u(x) = -\frac{x^2}{2} + cx + d$. Les conditions $u(0) = u(1) = 0$ donnent $d = 0$ et $c = 1/2$. Ainsi,

$$\forall x \in [0,1],\ u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$$

On vérifie que, pour $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned}
u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i) &= \frac{1}{2}x_{i+1}(1-x_{i+1}) + \frac{1}{2}x_{i-1}(1-x_{i-1}) - x_i(1-x_i) \\
&= h\left(\frac{i+1}{2}(1-(i+1)h) + \frac{i-1}{2}(1-(i-1)h) - i(1-ih)\right) \\
&= -h^2
\end{aligned}$$

Ainsi, $U = {}^t(u(x_1), \dots, u(x_n))$ vérifie $A_n U = h^2 F$ où F a toutes ses coordonnées égales à $1 = f(x_i)$. U vérifie donc (2) en ajoutant les termes d'indices 0 et $n+1$.

$$\boxed{\forall i \in \{0, \dots, n+1\},\ u_i = u(x_i) = \tfrac{1}{2}x_i(1-x_i)}$$

■

15) Avec les notations de la question 13, $B_n(h) + \varepsilon I_n$ est, pour $\varepsilon > 0$, une M matrice et son inverse est donc à coefficients positifs. En procédant comme en question 11, $B_n(h)^{-1}$ est à coefficients positifs. Si F est à coefficients positifs, ce qui est le cas si f est positive, $U = B_n(h)^{-1}F$ est à coefficients positifs. Comme on a aussi $u_0, u_{n+1} \geq 0$,

$$\boxed{\text{si } f \text{ est positive, alors } \forall i \in\ \{0, \dots, n+1\},\ u_i \geq 0}$$

■

16) On a plusieurs propriétés à prouver. Ci-dessous, on identifie $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices unicolonnes de taille n.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $X \mapsto AX$ est continue (linéaire en dimension finie). De plus $\{x/\ \|x\|_\infty \leq 1\}$ est un compact (fermé borné en dimension finie). $N(A)$ est ainsi bien définie (et c'est même un maximum).
- $\forall A,\ N(A) \geq 0$ (borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}^+$).
- Si $N(A) = 0$ alors $\forall x,\ Ax = 0$ et A est donc nulle (l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A l'est).
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty \leq 1$, $\|(A+B)x\|_\infty \leq \|Ax\|_\infty + \|Bx\|_\infty \leq N(A) + N(B)$
  Par passage à la borne supérieure, $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty \leq 1$,

  $$\|(\lambda A)x\|_\infty = |\lambda| \|Ax\|_\infty \leq |\lambda| N(A)$$

  Par passage au sup, $N(\lambda A) \leq |\lambda| N(A)$.
  Si $\lambda = 0$, l'inégalité est une égalité.
  Sinon, on utilise notre calcul pour obtenir $N(A) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda A)$ et récupérer encore l'égalité.

On a donc montré que

$$\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

On fixe une matrice A. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ de norme ≤ 1, on a

$$\forall i,\ |(Ax)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.|x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

En passant au maximum sur tous les i, on obtient

$$\|Ax\|_\infty \leq \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

et en passant à la borne supérieure sur tous les x,

$$N(A) \leq \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

Ce maximum est atteint pour une certaine valeur i_0 de i. Si on pose $x_k = 1$ quand $a_{i_0,k} \geq 0$ et $x_k = -1$ sinon, on obtient un vecteur x de norme infinie ≤ 1 et pour lequel $|(Ax)_{i_0}|$ est égal au maximum. Le majorant trouvé pour les $\|Ax\|_\infty$ est donc atteint et notre dernière inégalité est une égalité.

$$\boxed{N(A) = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|}$$

■

On continue à identifier $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices unicolonnes de taille n.
17)a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty \leq 1$. Notons $\mathbf{1}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées valent 1. $\mathbf{1} - x$ et $\mathbf{1} + x$ ont des coordonnées toutes positives. La question 15 (utilisée dans le cas $c = 0$) indique alors que

$$U' = ((n+1)^2A_n)^{-1}(\mathbf{1} - x) \text{ et } U'' = ((n+1)^2A_n)^{-1}(\mathbf{1} - x)$$

sont à coordonnées positives. En notant $y = ((n+1)^2A_n)^{-1}x$ et $z = ((n+1)^2A_n)^{-1}\mathbf{1}$, on a ainsi $-z_i \leq y_i \leq z_i$ et donc $\forall i,\ |y_i| \leq z_i$ ce qui entraîne

$$\|((n+1)^2A_n)^{-1}x\|_\infty \leq \|((n+1)^2A_n)^{-1}\mathbf{1}\|_\infty$$

Comme ceci est vrai pour tous les x de norme ≤ 1, on en conclut que

$$N(((n+1)^2A_n)^{-1}) \leq \|((n+1)^2A_n)^{-1}\mathbf{1}\|_\infty$$

La question 14 permet d'évaluer le membre de droite. Plus précisement, $z_i = \frac{1}{2}ih(1 - ih)$. Comme $t \mapsto \frac{1}{2}t(1-t)$ est plus petite que 1/8 sur $[0, 1]$ (simple étude de fonction), $\|z\|_\infty \leq \frac{1}{8}$. On a donc montré que

$$\boxed{N(((n+1)^2A_n)^{-1}) \leq \tfrac{1}{8}}$$

■

17)b) On suppose que D_n est diagonale à coefficients positifs. On sait que $B_n = (n+1)^2A_n + D_n$ est une M-matrice et donc inversible d'inverse à coefficients postifs (avec la question 10).
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty \leq 1$. Notons $|x| \in \mathbb{R}^n$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont les $|x_i|$ et posons $z = B_n^{-1}|x|$. C'est un vecteur à coordonnées positives (comme B_n^{-1} et $|x|$).

On a $|x| = B_n z = (n+1)^2 A_n z + D_n z$. Comme $D_n z$ est à coefficients positifs, $\forall i,\ |x|_i \geq y_i$ où $y = (n+1)^2 A_n z$. $|x| - y$ est à coefficients positifs et $((n+1)^2 A_n)^{-1}$ aussi. On en déduit que $((n+1)^2 A_n)^{-1}|x| - z$ est à coefficients positifs. Ainsi (comme z est aussi à coefficients positifs)

$$\|z\|_\infty \leq \|((n+1)^2 A_n)^{-1}|x|$$

Comme $|x|$ est de norme ≤ 1 on en déduit que

$$\|z\|_\infty \leq N(((n+1)^2 A_n)^{-1})$$

Par inégalité triangulaire, et comme B_n^{-1} est à coefficients positifs, $|(B_n^{-1}x)|_i \leq B_n^{-1}|x|_i = z_i$. Finalement

$$\|B_n^{-1}x\|_\infty \leq N(((n+1)^2 A_n)^{-1})$$

Ceci étant vrai pour tous les x de norme plus petite que 1,

$$\boxed{N(((n+1)^2 A_n + D_n)^{-1}) \leq N(((n+1)^2 A_n)^{-1}) \leq \frac{1}{8}}$$

■

18) On utilise les notations sugérées par l'énoncé. On a alors

$$A_n X = A_n \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_n) \end{pmatrix} - A_n \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = V \quad \text{avec} \quad v_i = -(u(x_{i-1}) - u_{i-1}) + 2(u(x_i) - u_i) - (u(x_{i+1}) - u_{i+1})$$

En utilisant la relation vérifiée par (u_i), on a

$$v_i = 2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) - h^2(f(x_i) - c(x_i)u_i)$$

Comme $f(x_i) - c(x_i)u(x_i) = -u''(x_i)$ on trouve alors

$$v_i = 2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) + h^2 u''(x_i) - h^2 c(x_i)(u(x_i) - u_i)$$

ce que l'on peut écrire

$$v_i + h^2 c(x_i)(u(x_i) - u_i) = 2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) + h^2 u''(x_i)$$

Si on divise par h^2, la question 12 (utilisable avec u car $u'' = cu - f \in \mathcal{C}^2$ et donc $u \in \mathcal{C}^4$), on a alors

$$\frac{1}{h^2} v_i + c(x_i)(u(x_i) - u_i) = w_i \quad \text{avec} \quad |w_i| \leq Ch^2$$

Avec la définition de V et en notant $D_n = \operatorname{diag}(c(x_1), \dots, c(x_n))$,

$$((n+1)^2 A_n + D_n) X = W$$

ou encore (si $W \neq 0$)

$$X = \|W\|_\infty ((n+1)^2 A_n + D_n)^{-1} \frac{W}{\|W\|_\infty}$$

Par définition de N,

$$\|X\|_\infty \leq \|W\|_\infty N(((n+1)^2 A_n + D_n)^{-1}) \leq \frac{C}{8(n+1)^2}$$

On a donc montré que

$$\boxed{\exists \tilde{C} /\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \max_{0\leq i\leq n+1} |u(x_i) - u_i| \leq \frac{\tilde{C}}{n^2}}$$

■

19)a) Une variable de Bernoulli de paramètre x à une espérance égale à x et une variance égale à $x(1-x)$. Par linéarité de l'espérance,

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = x}$$

Les X_i étant indépendantes, la variance de la somme est égale à la somme des variances et

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = \frac{x(1-x)}{n}}$$

Par formule de transfert (et comme les valeurs prises par les S_n sont les k/n avec $k = 0, \dots, n$)

$$\mathbb{E}(f(S_n)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(nS_n = k)$$

Or, nS_n sui une loi binomiale de paramètres n et x. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(f(S_n)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = B_n f(x)}$$

■

b) Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors on peut définir la variance et on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

La variance étant positive, $\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$. On utilise ceci avec $X = |S_n - x|$:

$$\mathbb{E}(|S_n - x|^2) \leq \mathbb{E}((S_n - x)^2)$$

Comme $x = \mathbb{E}(S_n)$, le membre de droite vaut $\mathbb{V}(S_n)$. On utilise la question précédente pour obtenir le membre de gauche :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\right)^2 \leq \mathbb{V}(S_n)$$

Comme la parenthèse est positive, le passage à la racine carrée (opération croissante) donne la première inégalité. Pour la seconde, on utilise $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ (étude de fonction déjà évoquée en question 17(a)) ce qui donne $\mathbb{V}(S_n) \leq \frac{1}{4n}$ et on passe encore à la racine carrée.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leq \mathbb{V}(S_n)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}}$$

■

20° Distinguons deux cas.

- Si $\lambda \in]0,1]$ alors (comme $\alpha > 0$), $\lambda^\alpha \leq 1 \leq 1 + \lambda$.
- Sinon $\lambda > 1$ et donc $\lambda^\alpha \leq \lambda$ (car $\alpha \leq 1$) et $\lambda^\alpha \leq 1 + \lambda$.

On a ainsi

$$\boxed{\forall \lambda > 0,\ \lambda^\alpha \leq 1 + \lambda}$$

On veut utiliser ceci avec $\lambda = \sqrt{n}|x - k/n|$. Ceci est possible si $x \neq k/n$ et donne alors

$$\left(\sqrt{n}|x - k/n|\right)^\alpha \leq 1 + \sqrt{n}|x - k/n|$$

En divisant par $n^{\alpha/2}$ (qui est > 0), on obtient l'inégalité demandé. Cette inégalité reste trivialement vraie quand $x = k/n$. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, \dots, n\},\ \left|x - \tfrac{k}{n}\right|^\alpha \leq n^{-\alpha/2}\left(1 + \sqrt{n}\left|x - \tfrac{k}{n}\right|\right)}$$

■

21) En utilisant la formule du binôme avec $(x + (1-x))^n$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x(1-x)^{n-k}$$

On en déduit que

$$f(x) - B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f(\frac{k}{n})\right)\binom{n}{k}x(1-x)^{n-k}$$

Par inégalité triangulaire puis avec l'hypothèse faite sur f, puis avec la question précédente

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f(x) - f(\frac{k}{n})\right|\binom{n}{k}x(1-x)^{n-k} \\
&\leq K\sum_{k=0}^{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|^\alpha\binom{n}{k}x(1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{K}{n^{\alpha/2}}\sum_{k=0}^{n}\left(1 + \sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|\right)\binom{n}{k}x(1-x)^{n-k} \\
&= \frac{K}{n^{\alpha/2}}\left(1 + \sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x(1-x)^{n-k}\right)
\end{aligned}$$

La question 19(b) permet de majorer la somme et d'obtenir

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \frac{3K}{2}\frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

Il reste à passer à la borne supérieure sur $x \in]0,1[$ (qui est la même que celle sur $[0,1]$ par continuité des fonctions) pour conclure que

$$\boxed{\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{3K}{2}\frac{1}{n^{\alpha/2}}}$$

■

22) On va utiliser ici la formule $k\binom{p+1}{k} = (p+1)\binom{p}{k-1}$ (qui se prouve facilement avec les expressions avec des factorielles) et aussi $\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n+1-k}$. On a

$$\begin{aligned}
(\hat{B}_{n+1}u)'(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} u_k k\binom{n+1}{k}x^{k-1}(1-x)^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} u_k(n+1-k)\binom{n+1}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= (n+1)\left(\sum_{k=1}^{n+1} u_k\binom{n}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n+1-k} - \sum_{k=1}^{n+1} u_k\binom{n}{n-k}x^k(1-x)^{n-k}\right) \\
&= (n+1)\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

On se trouve dans la même situation pour redériver. En posant $v_k = u_{k+1} - u_k$, on a $v_{k+1} - v_k = u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k$ et

$$(\hat{B}_{n+1}u)''(x) = n(n+1)\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k)\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}$$

On utilise alors $u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = -h^2 f(x_{k+1}) = -\frac{1}{(n+1)^2}f(x_{k+1})$ pour obtenir

$$\boxed{(\hat{B}_{n+1}u)''(x) = -\frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}}$$

■

23)a) Avec la question précédente, on a d'abord

$$(\hat{B}_{n+1}u)''(x) = -\frac{n}{n+1}\left(B_{n-1}f(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n-1}\right)\right)\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}\right)$$

On ajoute $-u''(x) = f(x)$ pour en déduire

$$\begin{aligned}\chi''_{n+1}(x) &= (f(x) - B_{n-1}f(x)) + \frac{1}{n+1}B_{n-1}f(x)\\ &\quad -\frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n-1}\right)\right)\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}\end{aligned}$$

Remarquons que

$$|B_{n-1}f(x)| \leq \|f\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} \leq \|f\|_\infty$$

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n-1}\right)\right| \quad | &\leq K\left|\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n-1}\right|^\alpha\\ &\leq K\left|\frac{n-2k+1}{(n-1)(n+1)}\right|^\alpha\\ &\leq \frac{K}{(n+1)^\alpha}\end{aligned}$$

car $-(n-1) \leq n - 2k - 1 \leq n - 1$ pour $0 \leq k \leq n-1$.
Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$|\chi''_{n+1}(x)| \leq \|f - B_{n-1}f\|_\infty + \frac{1}{n+1}\|f\|_\infty + \frac{K}{(n+1)^\alpha}$$

En passant à la borne supérieure, on obtient

$$\boxed{\|\chi''_{n+1}\|_\infty \leq \|f - B_{n-1}f\|_\infty + \frac{1}{n+1}\|f\|_\infty + K\frac{1}{(n+1)^\alpha}}$$

■

b) On fixe $x \in]0,1[$ et on considère la fonction h de l'énoncé. h est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et

$$h'(t) = \chi'_{n+1}(t) - \frac{\chi_{n+1}(x)}{x(1-x)}(1-2t)$$

$$h''(t) = \chi''_{n+1}(t) + 2\frac{\chi_{n+1}(x)}{x(1-x)}$$

Remarquons que comme $\chi_{n+1}(0) = \hat{B}_{n+1}u(0) = u_0 = 0$ et de même $\chi_{n+1}(1) = u_{n+1} = 0$ et que de plus $h(x) = 0$, par théorème de Rolle h' s'annule sur $]0, x[$ et sur $]x, 1[$. A nouveau par théorème de Rolle, h'' s'annule au moins une fois en un point ξ. ceci donne

$$\boxed{\chi_{n+1}(x) = -\frac{1}{2}x(1-x)\chi''_{n+1}(\xi)}$$

Pour $x \in \{0, 1\}$, toute valeur de ξ convient car $\chi_{n+1}(0) = \chi_{n+1}(1) = 0$. ■

24) On en déduit en combinant les deux questions de 23 que pour tout $x \in [0, 1]$

$$|\chi_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{8}\|\chi''_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}\left(\|f - B_{n-1}f\|_\infty + \frac{1}{n+1}\|f\|_\infty + K\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$$

En passant à la norme infinie et vec la question 21 on a donc

$$\|\chi_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}\left(\frac{3K}{2(n-1)^{\alpha/2}} + \frac{1}{n+1}\|f\|_\infty + K\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$$

$n^{\alpha/2}\|\chi_{n+1}\|_\infty$ est alors majoré par une suite convergente et est une suite bornée. Ainsi

$$\boxed{\exists M > 0 /\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|u - \hat{B}_{n+1}u\|_\infty \leq \frac{M}{n^{\alpha/2}}}$$

■