

Révision 5 (Corrigé partiel) : Type CCINP (PC*- Lycée Bellevue) 2024-2025

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul.

On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on note $e_k = X^k$ et $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{2n})$ la base canonique de E .

Pour tout couple de polynômes (P, Q) de E^2 , on pose $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

Soit L l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad L(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt.$$

1. Montrer que L est une forme linéaire sur E .
2. Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.
3. Déterminer la dimension de $\text{Ker}(L)$.
4. Prouver qu'il existe une base $\mathcal{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\text{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1 .
5. Montrer que :
 - i) $\text{Vect}(e_0)$ et $\text{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux,
 - ii) $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \text{Ker}(L)$.
6. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad T_\lambda(P) = P + \lambda L(P)X.$$

- 6.1. Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E .
- 6.2. Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.
- 6.3. Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions 4. et 5.
- 6.4. Déterminer les valeurs propres de T_λ .
- 6.5. L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?
- 6.6. Justifier que T_λ est un automorphisme de E .
- 6.7. Pour tous réels α et β , préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.
- 6.8. Déterminer T_λ^{-1} .

Solution :

1. L est définie sur E , à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la linéarité de l'intégrale assure celle de L .
2. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $L(e_k) = \int_{-1}^1 t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_{-1}^1 = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1}$.
3. L étant une forme linéaire non nulle (par exemple, $L(e_0) = 2 \neq 0$), son noyau est un hyperplan de E : $\dim(\text{Ker}(L)) = (2n+1) - 1 = 2n$.

4. On vérifie facilement que $L(e_1) = 0$: e_1 appartient donc à $\text{Ker}(L)$, et comme $e_1 \neq 0_E$, (e_1) est une famille libre de $\text{Ker}(L)$. D'après le théorème de la base incomplète, on en déduit qu'il existe une base de $\text{Ker}(L)$ dont le premier vecteur est e_1 .

5. (a) Considérons $P \in \text{Vect}(e_0)$ et $Q \in \text{Ker}(L)$.

Puisque $P \in \text{Vect}(e_0)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda e_0 = \lambda$.

Par conséquent, $(P|Q) = \int_{-1}^1 \lambda Q(t) dt = L(\lambda Q) = \lambda L(Q) = 0$.

Donc $\text{Vect}(e_0)$ et $\text{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux.

(b) En particulier, $\text{Vect}(e_0)$ et $\text{Ker}(L)$ sont en somme directe.

De plus, $\dim(\text{Vect}(e_0)) + \dim(\text{Ker}(L)) = 1 + 2n = \dim(E)$.

Par conséquent, $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \text{Ker}(L)$.

6. (a) T_λ est définie sur E , à valeurs dans E et, pour tout $(P, Q) \in E^2$, pour tout $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} T_\lambda(\mu P + \nu Q) &= (\mu P + \nu Q) + \lambda L(\mu P + \nu Q)X \\ &= (\mu P + \nu Q) + \lambda(\mu L(P) + \nu L(Q))X \\ &= \mu(P + \lambda L(P)X) + \nu(Q + \lambda L(Q)X) \\ &= \mu T_\lambda(P) + \nu T_\lambda(Q) \end{aligned}$$

T_λ est donc un endomorphisme de E .

(b) $(L \circ T_\lambda)(P) = L(T_\lambda(P)) = L(P + \lambda L(P)X) = L(P) + \lambda L(P) \underbrace{L(X)}_{=0} = L(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$.

(c) Considérons une base B constituée du vecteur e_0 suivi des vecteurs de la base U de $\text{Ker}(L)$ construite en 4.

$T_\lambda(e_0) = e_0 + \lambda L(e_0)X = 1 + 2\lambda X = 1.e_0 + 2\lambda.e_1$.

Pour tout vecteur P dans la base U de $\text{Ker}(L)$, $T_\lambda(P) = P + \lambda \times 0 \times X = P$.

$$\text{Par conséquent, } \mathcal{M}_B(T_\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2\lambda & 1 & 0 & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Puisque la matrice précédente est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

Par conséquent, $Sp(T_\lambda) = \{1\}$.

(e) Puisque $Sp(T_\lambda) = \{1\}$, T_λ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle T_λ est représenté par $2n+1$, autrement dit lorsque $T_\lambda = E$.

Ainsi, T_λ est diagonalisable si et seulement si $\lambda = 0$.

(f) Puisque $0 \notin Sp(T_\lambda)$, T_λ est un automorphisme de E .

(g) Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $P \in E$:

$$\begin{aligned} (T_\alpha \circ T_\beta)(P) &= T_\alpha(T_\beta(P)) = T_\alpha(P + \beta L(P)X) = T_\alpha(P) + \beta L(P) \underbrace{T_\alpha(X)}_{=X} \\ &= P + \alpha L(P)X + \beta L(P)X = P + (\alpha + \beta)L(P)X \end{aligned}$$

Donc $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.

- (h) On déduit de ce qui précède que $T_\lambda \circ T_{-\lambda} = T_{\lambda-\lambda} = T_0 =_E$ et, de même, $T_{-\lambda} \circ T_\lambda =_E$.
Par conséquent, la réciproque de T_λ est $T_{-\lambda}$.

EXERCICE 2

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Questions de cours

- 1.1. Rappeler sans démonstration la loi de X , son espérance et sa variance.
 - 1.2. Écrire les développements en séries entières des fonctions **sh** et **ch** ainsi que leurs domaines de validité.
 - 1.3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω .
Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».
2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X et définie par :

$$Y = 0 \text{ si } X \text{ est paire et } Y = 1 \text{ si } X \text{ est impaire.}$$

- 2.1. Exprimer les événements $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 1\}$ à l'aide d'événements $\{X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.
 - 2.2. En déduire la loi de Y et son espérance.
On donnera les résultats en utilisant les fonctions **exp**, **sh** et **ch**.
3. Soit Z une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X , indépendante de X et telle que :

$$Z(\Omega) = \{1, 2\} \text{ avec } \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{2}.$$

On pose $T = XZ$.

- 3.1. Préciser $T(\Omega)$.
- 3.2. Soit k un entier naturel.
En utilisant le système complet d'événements $(\{Z = 1\}, \{Z = 2\})$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(T = k)$ à l'aide de probabilités d'événements $\{X = j\}$ et $\{2X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.
- 3.3. Déterminer la loi de T .
- 3.4. Quelle est la probabilité que T prenne des valeurs paires?
On donnera le résultat en utilisant les fonctions **exp**, **sh** et **ch**.

EXERCICE 3

Question de cours

1. Soit x un réel positif. Comparer x et x^2 .

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

On se propose d'étudier la série de terme général $a_n = \frac{\sin(n^\alpha)}{n}$, $n \geq 1$.

2. On pose pour tout $t \geq 1$, $\varphi(t) = \frac{\sin(t^\alpha)}{t}$.
- 2.1. Justifier que la fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
- 2.2. Justifier que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer φ' .
- 2.3. Montrer que l'on a : $\forall t \in [1, +\infty[, |\varphi'(t)| \leq \frac{1 + \alpha t^\alpha}{t^2}$.
- 2.4. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\forall t \in [n, n+1], |\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) |t - n|.$$

3. On pose, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \int_n^{n+1} \varphi(t) dt$.

Prouver que l'on a : $\forall n \geq 1, |u_n - a_n| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

4. **Convergence de l'intégrale** $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

4.1. Démontrer que $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

4.2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer alors que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

5. Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$ converge.

6. En déduire que la série de terme général u_n converge.

7. Prouver que la série de terme général $u_n - a_n$ converge absolument.

8. Déduire des questions précédentes que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

9. **On suppose que la série $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ est convergente.**

9.1. Montrer qu'alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.

On pourra utiliser la question de cours.

9.2. Prouver que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$ converge.

On procédera comme à la question 4.2.

9.3. On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}$ est convergente.

Conclure sur la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$.

On pourra utiliser la formule de duplication : $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

Solution :

1. Puisque $x \geq 0$:
- (a) si $x \leq 1$, $x \times x \leq 1 \times x$, autrement dit $x^2 \leq x$;
- (b) si $x > 1$, $x^2 > x$.
2. (a) Puisque $t \mapsto t^\alpha$ est dérivable sur $[1; +\infty[$, et comme $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, la fonction $f_\alpha : t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1; +\infty[$, et, pour tout $t \geq 1$, $f'_\alpha(t) = \alpha t^{\alpha-1} \cos(t^\alpha)$.

(b) En tant que quotient de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $[1; +\infty[$, et, pour tout $t \geq 1$:

$$\varphi'(t) = \frac{\alpha t^{\alpha-1} \cos(t^\alpha) \times t - \sin(t^\alpha) \times 1}{t^2}$$

(c) Pour tout $t \geq 1$, $|\varphi'(t)| \leq \underbrace{\frac{\alpha t^\alpha |\cos(t^\alpha)| + |\sin(t^\alpha)|}{t^2}}_{\text{inégalité triangulaire}} \leq \frac{\alpha t^\alpha + 1}{t^2}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après 2.3, pour tout $t \in [n; n+1]$, $|\varphi'(t)| \leq \frac{1}{t^2} + \frac{\alpha}{t^{2-\alpha}} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$, car $t \mapsto 1/t^2$ et $t \mapsto 1/t^{2-\alpha}$ sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ ($2 - \alpha > 0$).

Par conséquent, d'après l'inégalité des accroissements finis, φ est $\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)$ -lipschitzienne sur $[n; n+1]$, et, en particulier :

$$\forall t \in [n; n+1], |\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right) |t - n|$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} |u_n - a_n| &= \left| \int_n^{n+1} \varphi(t) dt - \varphi(n) \right| \\ &= \left| \int_n^{n+1} \varphi(t) dt - \int_n^{n+1} \varphi(n) dt \right| \\ &= \left| \int_n^{n+1} (\varphi(t) - \varphi(n)) dt \right| \\ &\leq \int_n^{n+1} |\varphi(t) - \varphi(n)| dt \text{ par l'inégalité triangulaire} \\ &\leq \int_n^{n+1} \underbrace{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right) |t - n|}_{\leq 1} dt \text{ d'après 2.4, et par croissance de l'intégrale} \\ &\leq \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right) dt \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \end{aligned}$$

4. (a) $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$, et, pour tout $t \geq 1$, $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$: puisque $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, on en déduit, par comparaison, que $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

(b) Posons, pour tout $t \geq 1$:

$$\left[\begin{array}{ll} u(t) = \frac{1}{t} & \text{donc} \quad u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v'(t) = \sin(t) & \text{ou plutôt} \quad v(t) = -\cos(t) \end{array} \right]$$

u et v étant de classe C^1 sur $[1; +\infty[$, et puisque $u(t) \times v(t)t \rightarrow +\infty 0$, les intégrales $\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)dt$

et $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ ont la même nature.

Or $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \int_1^{+\infty} \left(-\frac{\cos(t)}{t^2}\right) dt$ est convergente, puisque $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Par conséquent, $\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

5. Posons $u = t^\alpha$.

$t \mapsto t^\alpha$ est de classe C^1 sur $[1; +\infty[$, et comme $\alpha \in]0; 1[$, cette fonction est également strictement croissante.

Ainsi, l'intégrale obtenue, en appliquant à l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$ le changement de variable défini par $u = t^\alpha$ (et donc $u = \alpha t^{\alpha-1} dt$) est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$, et :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt = \frac{1}{\alpha} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t^\alpha} (\alpha t^{\alpha-1} dt) = \frac{1}{\alpha} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$$

Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$ converge également.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt = \int_1^{n+1} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$.

Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$ est une intégrale convergente, la suite $\left(\int_1^{n+1} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt \right)_{n \geq 1}$ est convergente.

Par conséquent, la suite de terme général $\sum_{k=1}^n u_k$ est convergente : autrement dit, la série $\sum u_n$ converge.

7. D'après 3., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - a_n| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

Puisque $\alpha \in]0; 1[$, $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ sont deux séries de Riemann convergentes, $\sum \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right)$ converge.

Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum |u_n - a_n|$ est convergente, autrement dit que $\sum (u_n - a_n)$ converge absolument.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n - (u_n - a_n)$: puisque $\sum u_n$ et $\sum (u_n - a_n)$ sont des séries convergentes ($\sum (u_n - a_n)$ est absolument convergente, donc convergente), on en déduit que $\sum a_n$ converge.

9. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\sin(n^\alpha)| \leq 1$, donc $\sin^2(n^\alpha) = |\sin(n^\alpha)|^2 \leq |\sin(n^\alpha)|$, et donc $\frac{\sin^2(n^\alpha)}{n} \leq \frac{|\sin(n^\alpha)|}{n}$.

Puisque $\sum |a_n|$ est supposée convergente, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.

(b) Procédons, comme indiqué, comme en 4.2, et posons, pour tout $x \geq 1$:

$$\left[\begin{array}{ll} u(x) = \frac{1}{x} & \text{donc} \quad u'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ v'(x) = \cos(2x) & \text{ou plutôt} \quad v(x) = \frac{\sin(2x)}{2} \end{array} \right]$$

u et v étant de classe C^1 sur $[1; +\infty[$, et puisque $u(x) \times v(x)x \rightarrow +\infty 0$, les intégrales $\int_1^{+\infty} u(x)v'(x)dx$

et $\int_1^{+\infty} u'(x)v(x)dx$ ont la même nature.

Or $\int_1^{+\infty} u'(x)v(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{2x^2} dx$ est convergente (on peut montrer, comme en 4.1, que

$x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$), donc $\int_1^{+\infty} u(x)v'(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$ converge également.

(c) Pour tout $n \geq 1$, $\frac{\cos(2n^\alpha)}{n} = \frac{1 - 2\sin^2(n^\alpha)}{n} = \frac{1}{n} - 2 \times \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$.

Or, d'après 9.1, $\sum \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente, tandis que $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente : par conséquent, $\sum \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}$ est divergente... ce qui contredit sa convergence énoncée initialement.

L'hypothèse formulée au début de ce raisonnement est donc fausse : la série $\sum a_n$ n'est donc pas absolument convergente (... même si elle est convergente, comme cela a été établi en 8.).

EXERCICE 4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soient P et Q deux éléments de E .

On note : $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} 2^{-n} P(n) Q(n)$ est absolument convergente.

2. On pose pour tous P et Q dans E : $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n) Q(n)$.

2.1. Montrer que : $(S|S) = 0 \iff S$ est le polynôme nul.

2.2. Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Quelques calculs de sommes

3.1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ et sa somme.

3.2. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3.3. Exprimer $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$ à l'aide de la fonction f et en déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.4. Soit $x > 0$. Exprimer à l'aide des fonctions usuelles, $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

3.5. Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha 2^{-n}$.

Calculer S_0 , S_1 et S_2 .

On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de x bien choisie.

On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question 2.

4.1. Déterminer les réels a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à 1 et à X .

4.2. Prouver que l'ensemble $\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (n^2 - cn - d)^2, (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ possède un minimum.

4.3. En déduire la distance recherchée.

Solution :

3.3 $g(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$, pour $x > 0$. Ce qui montre bien que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.4 On a sans peine et pour tout $x > 0$: $g'(x) = -\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$ et plus douloureusement $g''(x) = e^{-x}(1 + e^{-x})(1 - e^{-x})^3$.

3.5 Par dérivation terme à terme de f , somme d'une série entière d'intervalle de convergence $] -1, 1[$, il vient (pour x) dans cet intervalle $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$ donc $f'(x) + xf''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^{n-1}$. En spécialisant ($x = 1/2$) et sachant que $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, il vient $S_0 = 2$, $S_1 = 2$ et $S_2 = 6$.

4.1

Pour commencer, calculons les produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned}(X^2 | 1) &= (X | X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 2^{-n} = S_2 = 6, & (X^2 | X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 2^{-n} = S_3 = 26, \\ (X | 1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n 2^{-n} = S_1 = 2, & (1 | 1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = S_0 = 2\end{aligned}$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $(X^2 - aX - b | 1) = 0$ si et seulement si $\underbrace{(X^2 | 1)}_{=6} - a \underbrace{(X | 1)}_{=2} - b \underbrace{(1 | 1)}_{=2} = 0$;
2. $(X^2 - aX - b | X) = 0$ si et seulement si $\underbrace{(X^2 | X)}_{=26} - a \underbrace{(X | X)}_{=6} - b \underbrace{(1 | X)}_{=2} = 0$.

Ainsi, $X^2 - aX - b$ est orthogonal à 1 et à X si et seulement si $\begin{cases} 2a + 2b = 6 \\ 6a + 2b = 26 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} a = 5 \\ b = -2 \end{cases}$

4.2 Pour tout $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (n^2 - cn - d)^2 = (X^2 - cX - d | X^2 - cX - d) = \|X^2 - (cX + d)\|^2$.

Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension finie, la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ est bien définie, et vaut :

$$\min \{ \|X^2 - P\| ; P \in \mathbb{R}_1[X] \} = \min \{ \|X^2 - (cX + d)\| ; (c, d) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Le minimum cherché existe donc, et est $(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2$.

4.3 En notant p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$, $(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2 - p(X^2)\|$.

De plus, $p(X^2)$ est l'unique polynôme Q de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que $X^2 - Q \in \mathbb{R}_1[X]^\perp$, autrement dit c'est l'unique polynôme de la forme $aX + b$ tel que $X^2 - aX - b$ est à la fois orthogonal à 1 et à X .

D'après 4.1, $p(X^2) = 5X - 2$, donc $(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2 - 5X + 2\|$.

De plus, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}\|X^2 - 5X + 2\|^2 &= \|X^2\|^2 - \|5X - 2\|^2 \\ &= (X^2 | X^2) - (5X - 2 | 5X - 2) \\ &= S_4 - (25(X | X) - 20(X | 1) + 4(1 | 1)) \\ &= S_4 - (25S_2 - 20S_1 + 4S_0) \\ &= 150 - (25 \times 6 - 20 \times 2 + 4 \times 2) \\ &= 32\end{aligned}$$

Finalement, $(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

FIN