PROBLÈME

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique rélle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul n, une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si et seulement si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}, \quad X^\top MX > 0.$$

Q1. Démontrer, en utilisant directement la définition précédente, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive.

Solution :

A est bien symétrique réelle et, en posant , il vient $X^\top AX = 2x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2 + y^2 \geq 0$ avec comme cas d'égalité $x = y = 0$. $\boxed{A \in S_2^{++}(\mathbb{R})}$■

Caractérisation spectrale

Q2. Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.

Solution :

Voir votre cours■

Q3. Application : Démontrer que le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$ admet trois racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les déterminer).

Démontrer alors que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est définie positive grâce à la caractérisation spectrale.

Solution :

On calcule préalablement le polynôme caractéristique de B ($L_1 \leftarrow L_1 + (\lambda - 1)L_3$) on trouve (en le notant P) :

$P = (X-2)((X-3)(X-1)-1) + 1 - X = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$.

P étant le polynôme caractéristique d'une matrice symétrique réelle, il est déjà scindé sur $\mathbb{R}$.

Si P possédait une racine multiple, celle-ci serait racine commune à P et P'.

Or 1 et 3 sont les racines de P' et ni l'une ni l'autre ne le sont pour P. Donc P admet trois racines réelles distinctes□

Il est assez évident que $P < 0$ sur $\mathbb{R}^-$ donc $B \in S_3^{++}(\mathbb{R})$■

Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le critère de Sylvester, valable en toute dimension.

Pour une matrice carrée quelconque $M = (m_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier $k \in [\![1, n[\![$, on définit le k-ième mineur principal comme étant le déterminant de la matrice $M_k = (m_{i,j})_{i,j\in[\![1,k]\!]} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. On précise qu'une matrice carrée de taille n possède n mineurs principaux.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **de la question Q3.** sont les déterminants des matrices $B_1 = (1), B_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B_3 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

Par exemple, pour la matrice B de **la question Q3.**, on constate que :

$$\det(B_1) = 1 > 0, \ \det(B_2) = 2 > 0 \text{ et } \det(B_3) = 3 > 0.$$

La matrice B vérifie le critère de Sylvester, elle est donc définie positive.

Q4. On fixe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un entier $k \in [\![1, n]\!]$, ainsi qu'un vecteur colonne $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$. Determiner un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, tel que

$$X_k^\top M_k X_k = X^\top M X.$$

Solution :
Il faut bien sûr supposer X_k non nulle.
Il suffit de prendre $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$■

Q5. Démontrer que toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.
Solution :
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
On considère $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$, non nulle. Par ce qui précède, on peut trouver $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, non nulle elle aussi, telle que $X_k^\top M_k X_k = X^\top M X > 0$, ce puisque $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$; ceci montre que $M_k \in S_k^{++}(\mathbb{R})$ donc que $det(M_k) > 0$ (car produit de valeurs propres strictement positives)■
Dans les deux questions suivantes, il s'agit de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive. Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la taille n de la matrice.

Q6. Soit $n \geq 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$. On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.
Justifier l'existence d'un vecteur colonne $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}V + U = 0$.
En notant $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, démontrer alors que $Q^\top MQ$ s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$.
Solution :
L'existence de V (par ailleurs unique) provient du caractère inversible de M_{n-1}.
Pour le reste simple calcul matriciel par blocs puis $\det(M) > 0$ par hypothèse et $\det(M_{n-1}) > 0$, donc $\beta > 0$ ■

Q7. Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.
Solution :
On considère le prédicat

> $\mathcal{H}(n)$: si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique vérifiant le critère de Sylvester, alors M est définie positive.

Dire qu'une matrice $M = (m) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ vérifie le critère de Sylvester signifie que $m > 0$, donc $(x)^\top M(x) = mx^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et la matrice M est définie positive : la proposition $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{H}(n-1)$ pour un certain entier $n \geqslant 2$ et on considère une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie le critère de Sylvester. Le déterminant de M est un mineur principal de M, donc $\det(M) > 0$; les autres mineurs principaux de M sont aussi les mineurs principaux de la sous-matrice M_{n-1}, qui est également symétrique ; par hypothèse de récurrence $\mathcal{H}(n-1)$, la matrice M_{n-1} est définie positive. D'après la question précédente, il existe une matrice Q inversible (en fait, triangulaire avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1) et un réel $\beta > 0$ tels que $Q^\top MQ = diag(M_{n-1}, \beta)$. Étant donné $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on écrit $Q^{-1}X = \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix}$ avec $Y \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{R}$; on effectue un calcul par blocs :

$$X^\top MX = \left(Q\begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix}\right)^\top MQ\begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^\top & z \end{pmatrix}(Q^\top MQ)\begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} Y^\top & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} = Y^\top M_{n-1}Y + \beta z^2$$

On a $\beta z^2 \geqslant 0$ et $Y^\top M_{n-1}Y \geqslant 0$ car M_{n-1} est définie positive, donc $X^\top MX \geqslant 0$; de plus, l'égalité $X^\top MX = 0$ entraîne $Y^\top M_{n-1}Y = 0$ et $\beta z^2 = 0$, donc $Y = 0$ et $z = 0$, et finalement $X = Q\begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} = 0$ aussi. On a donc établi que la matrice M est définie positive, et que $\mathcal{H}(n-1)$ implique $\mathcal{H}(n)$.
Par récurrence, on conclut que $\mathcal{H}(n)$ est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, autrement dit : toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive■

Q8. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ?
Solution :
Avec le critère de Sylvester, il suffit que son déterminant soit strictement positif. Un calcul

direct montrer qu'il vaut $1 - 2x^2$.
$\boxed{C(x) \in S_3^{++}(\mathbb{R}) \longleftrightarrow |x| < \frac{\sqrt{2}}{2}}$ ■

Q9. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ? Justifier.

Solution :
Nommons M cette matrice et notons P la matrice de permutation $diag(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_3)$. P est une matrice orthogonale, symétrique (donc sa propre inverse). Il en résulte que PMP est symétrique réelle (de même spectre que M car semblable à M) mais le terme situé sur la première et la première colonne de cette matrice vaut -1. Elle ne satisfait donc pas le critère de Sylvester et admet donc (comme M) une valeur propre négative.
$\boxed{M \notin S_5^{++}(\mathbb{R})}$ ■

Q10. Démontrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$:

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$$

Solution :
On note f cette fonction de 3 variables, $X = (x, y, z)^\top$ et $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $f(x, y, z) = X^\top MX$. Pour répondre à cette question il nous suffit de montrer que la matrice symétrique réelle M satisfait le critère de Sylvester et donc de vérifier que $det(M) > 0$.
Or celui-ci vaut $3/4$, le résultat en découle■

Q11. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice $S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle définie positive ?

Solution :
On reconnaît une matrice tridiagonale dont le déterminant sera noté Δ_n, où $\Delta_1 = \sqrt{3}$, $\Delta_2 = 2$. Pui en développant suivant la première colonne (cf cours sur les déterminants), il vient (pour $n \geq 3$) :
$\Delta_n - \sqrt{3}\Delta_{n-1} + \Delta_{n-2} = 0$.
Pour donner du sens à cette relation pour $n = 2$, on décide de poser $\Delta_0 = 1$.
L'équation caractéristique admet comme racines $e^{\pm \frac{i\pi}{6}}$ et on récupère $\Delta_n = 2\cos(\frac{(n-2)\pi}{6})$.
Dès lors les valeurs de n convenant sont 0,1,2,3,4 modulo 12■

FIN