
Corrigé succinct : Nombres de Bernoulli

Partie I – Nombres de Bernoulli

I.A – Suite des polynômes de Bernoulli

I.A.1) L'existence et l'unicité des polynômes B_n s'obtient immédiatement par récurrence : pour B_{n-1} donné, la relation $B'_n = nB_{n-1}$ fixe B_n à une constante près dont la valeur est déterminée en écrivant $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$

I.A.2) On utilise la même technique pour prouver que B_n est un polynôme unitaire de degré n .

I.A.3) Les polynômes C_n vérifient les relations du I.A.1) définissant de manière unique les polynômes B_n , d'où l'égalité.

I.B – Nombres de Bernoulli

I.B.1) Les premières égalités sont évidentes. Pour $n \geq 2$ on écrit :

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(t)dt = n \int_0^1 B_{n-1}(t)dt = 0$$

I.B.2) Pour $p \geq 1$: $B_{2p+1}(0) = B_{2p+1}(1) = C_{2p+1}(1) = -B_{2p+1}(0) \implies B_{2p+1}(0) = 0$

Partie II – Fonction génératrice des polynômes de Bernoulli

II.A –

La fonction u se prolonge par continuité en 0 en posant $u(0) = 1$. La fonction obtenue ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$ et la fonction $1/u$ définie pour $x \neq 0$ par $1/u(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ est DSE sur $\mathbf{R}$ donc C^∞ sur $\mathbf{R}$. Finalement la fonction prolongée u est C^∞ sur $\mathbf{R}$ comme inverse partout défini d'une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}$. Enfin la fonction ϕ définie par $\phi(x, t) = u(x)e^{tx}$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$ comme produit de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$.

II.B –

II.B.1) On trouve :

$$\phi(x, t) = 1 + (t - \frac{1}{2})x + (\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{2}t)x^2 + (\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t - \frac{1}{4}t^2)x^3 + o(x^3)$$

$$\text{II.B.2) } \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = \frac{x^2 e^{tx}}{e^x - 1} = x\phi(x, t)$$

d'où pour $n \geq 1$: $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \phi(x, t) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = x \frac{\partial^n}{\partial x^n} \phi(x, t) + n \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \phi(x, t)$ (Leibniz)

II.B.3) $a_0(t) = \phi(0, t) = 1$ et la relation précédente donne pour $n \geq 1$: $a'_n = na_{n-1}$.

De plus pour $x \neq 0$: $\int_0^1 \phi(x, t)dt = \frac{xe^{tx}}{e^x - 1} \int_0^1 e^{tx} dt = 1$, résultat encore valable pour $x = 0$ car $\phi(0, t) = 1$.

La fonction $(x, t) \rightarrow \phi(x, t)$ étant C^∞ sur $\mathbf{R} \times [0, 1]$, la fonction $x \rightarrow \int_0^1 \phi(x, t)dt$ est alors C^∞ sur $\mathbf{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall n \geq 1 \quad \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 \phi(x, t)dt = \int_0^1 \frac{\partial^n}{\partial x^n} \phi(x, t)dt$$

d'où pour $x = 0$: $\forall n \geq 1 \quad 0 = \int_0^1 a_n(t)dt$

On en déduit par récurrence que la fonction a_n est polynômiale pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme de plus ces polynômes vérifient les relations du I.A.1), on obtient l'égalité : $a_n = B_n$.

$$\text{II.B.4) } \frac{e^x - 1}{x} \phi(x, t) = e^{tx} = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\text{mais aussi } \frac{e^x - 1}{x} \phi(x, t) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{(k+1)!} + o(x^n) \right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{B_k(t)}{k!} x^k + o(x^n) \right) = \sum_{k=0}^n \alpha_k(t) x^k + o(x^n)$$

$$\text{avec } \alpha_k(t) = \sum_{h=0}^k \frac{1}{(k-h+1)!} \frac{B_h(t)}{h!} = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{h=0}^k C_{k+1}^h B_h(t)$$

d'où, en identifiant les coefficients du DL : $\forall 0 \leq k \leq n \quad t^k = \frac{1}{k+1} \sum_{h=0}^k C_{k+1}^h B_h(t)$ et par suite pour $n \geq 1$:

$$B_n(t) = t^n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k(t)$$

II.C –

En faisant $t = 0$ on obtient finalement :

$$b_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1 \quad b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k b_k$$

Partie III – Formule d'Euler Mac-Laurin

III.A –

III.A.1) Par parties :

$$R_0 = \int_0^1 f(t) B_0(t) dt = \int_0^1 f(t) B_1'(t) dt = [f(t) B_1(t)]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t) B_2(t) dt = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{2} [f'(t) B_2(t)]_0^1 + R_1 = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{2} [f'(t) B_2(t)]_0^1 + R_1$$

et pour $k \geq 1$:

$$R_k = \int_0^1 \frac{f^{(2k)}(t) B_{2k}(t)}{(2k)!} dt = \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^1 f^{(2k)}(t) B_{2k+1}'(t) dt = -\frac{1}{(2k+1)!} \int_0^1 f^{(2k+1)}(t) B_{2k+1}(t) dt = -\frac{1}{(2k+2)!} \int_0^1 f^{(2k+2)}(t) B_{2k+2}(t) dt + R_{k+1}$$

III.A.2) On obtient alors immédiatement par récurrence :

$$R_0 = \int_0^1 f(t) dt = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \sum_{j=1}^p \frac{b_{2j}}{(2j)!} [f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)] + R_p$$

III.B –

$$\text{III.B.1) On écrit } \int_a^b g^{(2p)}(u) B_{2p}(< \frac{u-a}{h} >) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g^{(2p)}(u) B_{2p}(< \frac{u-a}{h} >)$$

et la fonction $u \rightarrow < \frac{u-a}{h} >$ étant périodique de période h :

$$\forall u \in [a_k, a_{k+1}[\quad < \frac{u-a}{h} > = < \frac{u-a_k}{h} > = \frac{u-a_k}{h}$$

d'où le résultat.

III.B.2) $r_{p,n} = \sum_{k=0}^{n-1} h^{2p} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{g^{(2p)}(u) B_{2p}(\frac{u-a_k}{h})}{(2p)!} du$ et le changement de variable $t = \frac{u-a_k}{h}$ dans l'intégrale sur $[a_k, a_{k+1}]$ donne :

$$h^{2p} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{g^{(2p)}(u) B_{2p}(\frac{u-a_k}{h})}{(2p)!} du = h \int_0^1 \frac{f^{(2p)}(t) B_{2p}(t)}{(2p)!} dt = h R_p$$

où l'on a posé $f(t) = g(a_k + ht)$.

En appliquant alors la relation du III.A.2) à chacune de ces intégrales, on obtient le résultat cherché :

$$r_{0,n} = \int_a^b g(t) dt = h \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(a_k) + g(a_{k+1})}{2} - h \sum_{j=1}^p \frac{b_{2j}}{(2j)!} h^{2j-1} \sum_{k=0}^{n-1} [g^{(2j-1)}(a_{k+1}) - g^{(2j-1)}(a_k)] + r_{p,n} = h \left[\frac{g(a) + g(b)}{2} + \dots \right]$$

Partie IV – Application

IV.A –

Ecrivons, comme cela est suggéré dans l'énoncé, la formule d'Euler Mac-Laurin obtenue au III.B.2) pour la fonction $g : t \rightarrow e^{it^\alpha}$ sur le segment $[1, n+1]$. g étant de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$, on aura pour tout $p \geq 1$:

$$\int_1^{n+1} g(t)dt = S_n + \frac{e^{i(n+1)^\alpha} - e^i}{2} - \sum_{j=1}^p \frac{b_{2j}}{(2j)!} [g^{(2j-1)}(n+1) - g^{(2j-1)}(1)] + r_{p,n}$$

$$\text{avec } r_{p,n} = \int_1^{n+1} g^{(2p)}(u) B_{2p}(< u-1 >) du$$

IV.B –

$$\text{IV.B.1) Par parties : } I_n = \int_1^{n^\alpha} e^{ix} x^{\frac{1}{\alpha}-1} dx = -ie^{in^\alpha} n^{1-\alpha} + ie^i + i\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \int_1^{n^\alpha} e^{ix} x^{\frac{1}{\alpha}-2} dx$$

$$\text{et } J_n = \int_1^{n^\alpha} e^{ix} x^{\frac{1}{\alpha}-2} dx = -ie^{in^\alpha} n^{1-2\alpha} + ie^i + i\left(\frac{1}{\alpha} - 2\right) \int_1^{n^\alpha} e^{ix} x^{\frac{1}{\alpha}-3} dx$$

$$\text{avec } \left| \left(\frac{1}{\alpha} - 2\right) \int_1^{n^\alpha} e^{ix} x^{\frac{1}{\alpha}-3} dx \right| \leq \left| \frac{1}{\alpha} - 2 \right| \int_1^{n^\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-3} dx = |n^{1-2\alpha} - 1| \text{ (attention au signe de } \frac{1}{\alpha} - 2 \text{ !)}$$

par suite, dans tous les cas, $J_n = o(n^{1-\alpha})$ car $1 - 2\alpha < 1 - \alpha$. et donc $I_n \sim -ie^{in^\alpha} n^{1-\alpha}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

IV.B.2) On change de variable dans l'intégrale en posant $x = t^\alpha$ et on trouve :

$$\int_1^n e^{it^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha} I_n \sim -\frac{i}{\alpha} e^{in^\alpha} n^{1-\alpha}$$

IV.C –

Démontrons le résultat par récurrence.

$|g(t)| = 1$ et $g'(t) = i\alpha t^{\alpha-1} g(t) \Rightarrow |g'(t)| = \alpha t^{\alpha-1}$, on voit donc immédiatement que le résultat est assuré aux rangs $j = 0$ et $j = 1$ (on demande en fait de le démontrer seulement pour $j \geq 1$).

Si on suppose que $g^{(k)}(n) = O(n^{k(\alpha-1)})$ pour $0 \leq k \leq j-1$, on a (Leibniz) :

$$g^{(j)}(t) = (g'(t))^{(j-1)} = i\alpha (t^{\alpha-1} g(t))^{(j-1)} = i\alpha \sum_{p=0}^{j-1} C_{j-1}^p (\alpha-1)(\dots)(\alpha-j+p+1) t^{\alpha-j+p} g^{(p)}(t)$$

et on obtient : $n^{\alpha-j+p} g^{(p)}(n) = O(n^{(p+1)(\alpha-1)}) = O(n^{j(\alpha-1)})$ pour $0 \leq p \leq j-1$.

Donc $g^{(j)}(n) = O(n^{j(\alpha-1)})$, c'est le résultat au rang j .

IV.D –

IV.D.1) En utilisant la méthode précédente, on obtient plus généralement :

$$\forall j \in \mathbf{N} \quad g^{(j)}(t) = O(t^{j(\alpha-1)}) \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty$$

Or $\left| \int_1^{n+1} g^{(2p)}(t) B_{2p}(< t-1 >) dt \right| \leq M_{2p} \int_1^{n+1} |g^{(2p)}(t)| dt$ et en choisissant p tel que $2p(\alpha-1) \leq -2$,

ce qui est toujours possible car $\alpha-1 < 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} |g^{(2p)}(t)| dt$ devient convergente : la fonction $t \rightarrow g^{(2p)}(t) = O(1/t^2)$ en $+\infty$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Par suite :

$$\left| \int_1^{n+1} g^{(2p)}(t) B_{2p}(< t-1 >) dt \right| \leq M_{2p} \int_1^{+\infty} |g^{(2p)}(t)| dt$$

d'où le résultat.

IV.D.2) On reprend l'égalité obtenue au IV.A pour cette valeur de p :

$$S_n = \int_1^{n+1} g(t) dt - \frac{e^{i(n+1)^\alpha} - e^i}{2} + \sum_{j=1}^p \frac{b_{2j}}{(2j)!} [g^{(2j-1)}(n+1) - g^{(2j-1)}(1)] - r_{p,n}$$

$$\text{avec } r_{p,n} = \int_1^{n+1} g^{(2p)}(t) B_{2p}(< t-1 >) dt$$

En utilisant les résultats précédents, on voit que dans cette somme tous les termes sont négligeables devant le premier et donc :

$$S_n \sim \int_1^{n+1} g(t) dt \sim -\frac{i}{\alpha} e^{i(n+1)^\alpha} (n+1)^{1-\alpha}$$

De plus $(n+1)^{1-\alpha} \sim n^\alpha$ et $e^{i(n+1)^\alpha} = e^{in^\alpha(1+\frac{1}{n})^\alpha} = e^{in^\alpha} e^{i\alpha n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1})} \sim e^{in^\alpha}$, on obtient finalement :

$$S_n \sim -\frac{i}{\alpha} e^{in^\alpha} n^{1-\alpha}$$
