$\boxed{\text{Correction PARTIEL 2}}$ CPES Série Générale.

Exercice 1

1°) $(1+x)(2-x) = 2 \iff -x^2+x+2 = 2 \iff x(1-x) = 0 \iff \boxed{x=0 \text{ ou } x=1}$

2°) $2\ln(1+e^x) + \ln(2-e^x) = \ln\big(2(1+e^x)\big)$ (E)

Ensemble de déf : $\begin{cases} 1+e^x > 0 \\ 2-e^x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x < \ln 2 \end{cases}$ $\boxed{\mathcal{D} =]-\infty ; \ln 2[}$

Résolution : (E) $\iff (1+e^x)^2(2-e^x) = 2(1+e^x)$ $\div\ 1+e^x \neq 0$

$\iff (1+e^x)(2-e^x) = 2$

$\iff e^x = 0$ ou $e^x = 1$.

$\iff x = 0$ or $0 \in \mathcal{D}$ donc $\boxed{\mathcal{S} = \{0\}}$

3°) sur $]-\pi, \pi]$, $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\iff 3x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ou $3x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$\iff 3x = \frac{\pi}{12} + k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ou $3x = \frac{19\pi}{12} + k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$\iff x = \frac{\pi}{36} + k\times\frac{2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$ ou $x = \frac{19\pi}{36} + k\times\frac{2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

$\iff \boxed{x \in \left\{\frac{\pi}{36} ; -\frac{23\pi}{36} ; \frac{25\pi}{36} ; \frac{19\pi}{36} ; -\frac{5\pi}{36} ; -\frac{29\pi}{36}\right\}}$

Exercice 2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (2+\cos x)e^{1-x}$

1°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$

$1 \leq \cos x + 2 \leq 3$

donc $0 < e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0}$

2°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\times\left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$= \cos x + \sin x$.

3°) f dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit. $u = 2+\cos x$ $u'(x) = -\sin x$

$v = e^{1-x}$ $v'(x) = -e^{1-x}$

Donc $f'(x) = (2+\cos x)(-e^{1-x}) + (-\sin x)e^{1-x}$

$= e^{1-x}(-2 - \cos x - \sin x)$

donc $f'(x) = -e^{1-x}\left(2+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

or $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 0 < 2-\sqrt{2} \leq 2+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leq 2+\sqrt{2}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left(2+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) < 0$ donc f décroissante sur $\mathbb{R}$.

4°) a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$ cf 1°)

b) Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice 3

1°) $u : \underset{I}{]0;+\infty[} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2 - 2 + \ln(x)$

1°a) u dérivable sur I et $\forall x > 0$, $u'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$

or $2x^2+1 > 0$ sur I.

Donc

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$u'(x)$	$+$
$u(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

$\lim\limits_{0} u = -\infty$
$\lim\limits_{+\infty} u = +\infty$) par opérations sur les limites.

1°) b) sur $]0;+\infty[$, u est continue car dérivable et u est strictement croissante de plus $0 \in]\lim\limits_{0} u ; \lim\limits_{+\infty} u[$ donc d'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution $\alpha \in I$ à l'équation $u(x) = 0$.

$\alpha \simeq 1{,}31$.

1°) c) On en déduit le tableau de signe de u :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

1°) d) $u(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 - 2 + \ln(\alpha) = 0 \iff \ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$

2°) f définie sur I et $\forall x \in I$, $f(x) = x^2 + (2-\ln x)^2$

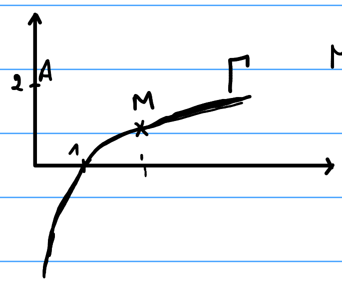
2 a) $f'(x) = 2x + 2\times\left(-\frac{1}{x}\right)(2-\ln x)$

$= \frac{2}{x}\left(x^2 - 2 + \ln(x)\right) = \frac{2}{x}\times u(x)$

2 b) or sur I, $\frac{2}{x} > 0$ et $u(x) > 0 \iff x > \alpha$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+\infty$ $\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$ $+\infty$	

2 c) $f(\alpha) = \alpha^2 + \left(2 - \ln(\alpha)\right)^2 \overset{\text{car } 2-\ln(\alpha)=\alpha^2}{=} \alpha^2 + (\alpha^2)^2 = \alpha^2(1+\alpha^2) > 0$

3°) 

$M(x ; \ln(x)) \in \Gamma$.

3a) $AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$

$\Leftrightarrow AM = \sqrt{x^2 + (2 - \ln(x))^2}$

$\Leftrightarrow AM = \sqrt{f(x)}$

3b) f admet un minimum en α qui vaut $\alpha^2(1+\alpha^2)$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante
donc AM admet un minimum en α : $M_0(\alpha ; \ln(\alpha))$

3c) et $AM_0 = \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2(1+\alpha^2)} = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$

HB

3d) $\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix}\alpha \\ \ln(\alpha)-2\end{pmatrix}$ et la tangente en M_0 à Γ.

vecteur directeur de la tangente : $\begin{pmatrix}1 \\ \ell'(\alpha)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \\ \frac{1}{\alpha}\end{pmatrix}$ proportionnel à $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha \\ 1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u} = \alpha^2 + \ln(\alpha) - 2 = \alpha^2 + 2 - \alpha^2 - 2 = 0$ donc

(AM_0) est perpendiculaire à la tangente à Γ passant par M_0

Exercice 4.

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x - x^2 = 0$ ...... car $\lim\limits_{0} x\ln x = 0$ par croiss. comparées.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x - x^2 = -\infty$ ...... car $x^2\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)$ tend vers $-\infty$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+3}{e^x - x} = 1$ ...... car .... $= \dfrac{1+3e^{-x}}{1-\frac{x}{e^x}}$ $\quad \frac{x}{e^x} \overset{+\infty}{\to} 0$ par CC.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{e^x - 1} = 1$ ...... car .... $= \underbrace{\dfrac{\ln(x+1)}{x}}_{\to 1} \times \underbrace{\dfrac{x}{e^x - 1}}_{\to 1}$

Exercice 5 $\quad x \in [0 ; +\infty[= I$

1°) on pose $u(x) = \ln(1+x) - x$ $\quad u'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$ donc u décroiss et $u(0) = 0$.
donc $u \leq 0$ sur I donc $\forall x \in I$, $\ln(1+x) \leq x$

De même, $v(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$, $v'(x) = \frac{-x}{1+x} + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$ donc $v \nearrow$ $\quad v(0) = 0$
Donc $v \geq 0$ sur I donc $\forall x \in I$, $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

Donc $[1] \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \in I$

2°) d'après [1] : $\overset{x\neq 0}{} \; 1 - \frac{x}{2} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} 1 - \frac{x}{2} = 1$

Donc par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$

3°) $w(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ $\quad w'(x) = \frac{x^2}{1+x} - x^2 = \frac{-x^3}{1+x} < 0$ sur I donc

comme $w(0)=0$, $w(x) \leq 0 \ \forall x \in I$ donc

$\boxed{[2] \ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$

4°) on considère $\Delta_0 f(h) = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{\ln(1+h)}{h} - 1}{h}$

$$= \frac{\ln(1+h) - h}{h^2}$$

or d'après [2] $\quad -\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+h) - h \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Donc $\quad -\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+h)-h}{h^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{h}{3}$

Donc par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ >0}} \Delta_0 f(h) = -\frac{1}{2}}$

Donc $\boxed{f \text{ dérivable à droite en } 0.}$

5°) Série harmonique. $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ h_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

5a) Soit $x > 0$ $\quad \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{2x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{(2x-1)(x+1) - 2x^2}{2x^2(x+1)}$

$= \frac{x-1}{2x^2(x+1)} \geq 0$ si $x \geq 1$ $\quad$ donc $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \geq \frac{1}{x+1}$

5b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $\quad \ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

d'après $[1]^{x=\frac{1}{k}}$, $\quad \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

or si $k \geq 1$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}$ donc

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}}$$

5c) En sommant entre 1 et $n-1$: $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)}_{\text{somme télescopique}} \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} \leqslant \ln(n)-\ln(1) \leqslant 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} \leqslant \ln(n) \leqslant 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1} \quad [3]$$

$\to \ln(n)+\frac{1}{n} \leqslant h_n$

$+1$: $\to h_n \leqslant \ln(n)+1$

donc $\boxed{\ln(n)+\frac{1}{n} \leqslant h_n \leqslant \ln(n)+1}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n)+\frac{1}{n} = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} h_n = +\infty}$

e) D'après l'inégalité [3], $\dfrac{\ln(n)+\frac{1}{n}}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{h_n}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{\ln(n)+1}{\ln(n)}$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{h_n}{\ln(n)} \leqslant 1+\frac{1}{\ln(n)}$$

Par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1}$

Ainsi $\boxed{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} \simeq \ln(n)}$ quand n est "grand