Lycée Bellevue. Toulouse **PC*** 2024-2025
21/05/2025

ORAUX 0

Exercice 1 : Exercice majeur INP
Préparation 30' et passage 20'

....

Pour a réel, on note F_a l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que :
i) $u_0 = u_7 = 0$ et
ii) $u_{n+2} - au_{n+1} + u_n = 0$, pour tout n entier naturel.
1) Montrer que cet ensemble est un sev de l'espace usuel des suites réelles.
2) Prouver que si $|a| \geq 2$, F_a est réduit à la suite nulle.
On désigne par A la matrice 6×6 avec des 1 au dessus et au dessous de la diagonale et des 0 ailleurs.
3) Soit $X = (x_1, ..., x_6)$ un vecteur propre de A, associée à la valeur propre a. Vérifier que $0, x_1, ..., x_6, 0$ sont les premiers termes d'une suite de F_a.
4) Etablir que si a est valeur propre de A, il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $a = 2cos\theta$.
5) Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de A.
Solution :
5) $a = 2\cos(\theta)$ est une valeur propre de A ssi il existe une suite non nulle de F_a.
Or (x_n) est une telle suite ssi $x_0 = x_7 = 0$, $x_1 \neq 0$ et pour tout n : $x_{n+2} - ax_{n+1} + x_n = 0$.
La théorie des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 nous dit donc (en omettant les deux premières conditions) qu'il existe deux réels u et v tels que : $x_n = u\cos(n\theta) + v\sin(n\theta)$, ce pour tout n.
En injectant les premières conditions dans cette relation nous obtenons $u = 0$, $v \neq 0$, $\sin(\theta) \neq 0$ et $\sin(7\theta) = 0$.
On en tire (outre $u = 0$, $v \neq 0$) $\theta = k\dfrac{\pi}{7}$, $k \in [\![1, 6]\!]$.
Il en résulte que $Sp(A) = \{\sin(k\dfrac{\pi}{7}),\ k \in [\![1, 6]\!]\}$ et que, pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$, l'espace propre associé à $\sin(k\dfrac{\pi}{7})$ est la droite vectorielle engendrée par $(\sin(k\dfrac{\pi}{7}), ..., \sin(6k\dfrac{\pi}{7}))^T$■

Exercice 2 : (INP exercice en direct) 10'
On se donne une matrice carrée aléatoire d'ordre 3 dont tous les coefficients varient indépendamment et uniformément dans $\{0, 1, 2, 3\}$.
Quelle est la probabilité que cette matrice soit symétrique?
(Plus fin) Quelle est la probabilité que la trace de cette matrice soit paire?
Solution :
On ne corrige que la seconde question. L'univers peut être assimilé à l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dont les coefficients valent 0 ou 1. Notons A cet univers et I la matrice de A dont tous les coefficients sont égaux à 1. On voit aisément que l'application f qui à $M \in A$ associe $I - M$ est bijective et transforme le sous-ensemble B (de A) des matrices dont la trace est paire en celui des matrices de A dont la trace est impaire. Ce qui montre que ces deux ensembles (dont la réunion est A) sont équipotents et ainsi la probabilité cherchée vaut 1/2■

....

Exercice 3 : (Planche Mines avec préparation 15' + 25 à 30' passage en moyenne)
Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}dt$.
1) Etablir que la suite (a_n) décroît et donner ses deux premiers termes.
2) Prouver que $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+4}a_n$, ce pour tout n.
3) Vérifier que la suite $((n+3)(n+2)(n+1)a_{n+1}a_n)$ est constante.
4) En déduire un équivalent de a_n.
5) Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$?
Exercice 4 : (En direct 15' minutes en moyenne mais pouvant déboucher sur un autre exercice)
Soit A une matrice d'ordre $n \geq 3$ et à coefficients complexes. On suppose en outre que le rang de A vaut 2 et que sa trace est nulle.

Prouver que A est diagonalisable ssi $A^n \neq 0$.

. . . .

Exercice 5 : (X - ESPCI)
Racines de $X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$?

Exercice 6 : (ENS)
Soit f convexe et C^1 sur $\mathbb{R}$.
Etablir que $f(x + f'(x)) \geq f(x)$, ce pour tout réel x. **Solution :**
La convexité de f équivaut à la croissance de f'.
Trois cas possibles.
i) $f' \leq 0$ alors f est décroissante et pour tout réel x : $x + f'(x) \leq x$ donc par décroissance de f $f(x + f'(x)) \geq f(x)$.
ii) Même type de raisonnement si $f' \geq 0$.
iii) Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \leq 0$ pour $x \leq c$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq c$, il suffit d'adapter les deux premiers cas étudiés$\blacksquare$