
Oraux 1.

Exercice 1 : (INP exercice majeur)

- 1) Montrer que $(A, B) \rightarrow \text{tr}({}^tBA) = \langle A, B \rangle$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Dans 2) et 3) on utilise la structure euclidienne que confère à $M_n(\mathbb{R})$ ce produit scalaire.
- 2)a) Vérifier que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $M_n(\mathbb{R})$.
- b) Déterminer une b.o.n de $M_n(\mathbb{R})$ (Utiliser les matrices élémentaires).
- 3) Prouver que : $A \in S_n(\mathbb{R}) \iff A^tA = A^2$.
- 4) On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = UV^t$.

Prouver(avec le minimum de calcul) que $A^tA = A^2$. Commentaire?

Solution :

- 1) Après passage je préfère donner une preuve complète de ce fait (c'est du cours!). On pose $E = M_n(\mathbb{R})$ pour alléger.
- i) La procédure renvoie bien un réel.
- ii) Pour $(A, B) \in E^2$, $\text{tr}({}^tAB) = \text{tr}({}^t({}^tAB)) = \text{tr}({}^tBA)$; ce qui donne la symétrie.
- iii) La linéarité de la trace et le ii) assurent de la bilinéarité.
- iv) Je propose une alternative non calculatoire pour la vérification des deux derniers points en nous donnant $A \in E$.
 $\langle A, A \rangle = \text{tr}({}^tAA)$ et ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$ (voir cours) donc les valeurs propres de tAA sont des réels positifs et sa trace (somme de celles-ci) est bien positive. D'où la positivité.
Supposons $\langle A, A \rangle = 0$, cela implique que toutes les valeurs propres de tAA sont nulles et puisque cette matrice est dz, elle est bien nulle■
- 2)b) Les matrices élémentaires de E forment la base canonique de E ; ce sont les $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé en i-ième ligne et j-ième colonne qui, lui, vaut 1 (Bien sûr i, j sont des entiers compris entre 1 et n).
Elles forment une b.o.n de E ■

Exercice 2 : (INP exercice en direct) 10'

Pour n entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^n} dx$.

- a) Nature de I_1 ? de I_n ?
- b) Calculer, lorsque c'est possible, I_n .

Solution :

- a) Il y a Cv ssi $n \geq 2$.
- b) Dans le cas de convergence une IPP donne aisément la valeur■

Exercice 3 : (INP exercice en direct) 10'

Pour n entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$.

- a) Limite de la suite (I_n) ?
- b) Calculer, pour tout n , $I_n + I_{n+1}$.
- c) En déduire $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 4 : (INP exercice majeur)

On se donne une suite de variables aléatoires (X_n) mutuellement indépendantes et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p .

On pose alors, pour tout n , $Y_n = X_n X_{n+1}$.

- 1) Déterminer la loi de chaque Y_n ainsi que son espérance et sa variance.
- 2) Pour $i \neq j$, donner $\text{cov}(Y_i, Y_j)$. Les (Y_n) sont elles mutuellement indépendantes?

On pose, pour tout n , $S_n = \sum_{k=0}^n Y_k$ et $Z_n = \frac{S_n}{n+1}$.

- 3) Espérance et variance de S_n .

4) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Z_n - p^2| \geq a) = 0$

Exercice 5 : (INP exercice en direct) 10'

On donne X, Y deux variables aléatoires, à valeurs dans \mathbb{N} , définies sur un même espace probabilisé et telles que : $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!2^{j+1}}$

Déterminer a puis les lois marginales de X et Y .

Solution :

Fait en cours ■

Exercice 6 : (INP exercice en direct) 10'

On pose $f(x) = \frac{1}{2-x^2}$.

- 1) Donner le DSE de f et son rayon de convergence.
- 2) Donner la loi de la v.a.d X dont f est la fonction génératrice.
- 3) $E(X)$? Loi de $Y = \frac{X}{2}$?

Solution :

1) Pour $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n+1}}$.

2) Le DSE de f est à coefficients positifs et $f(1) = 1$ donc f est bien la fonction génératrice d'une v.a.d à valeurs dans \mathbb{N} et $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$, ce pour tout n .

3) f étant DSE sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, elle est dérivable en 1 et X possède bien une espérance mathématique finie. Celle-ci vaut $f'(1) = 2$.

Y est à valeurs demi-entières. Si k est un demi-entier $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 2k) = \frac{1}{2^{2k+1}}$ ■

Exercice 7 : (INP exercice en direct) 10'

Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = 1 + j^n + j^{2n}$ (On rappelle que $j = \exp(2i\pi/3)$).

a) Simplifier S_n , ce pour tout n .

X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1. On définit Y comme celle qui renvoie le reste de la division euclidienne de X par 3.

b) Que vaut $\mathbb{P}(Y = 0)$?

Exercice 8 : (INP exercice en direct) 10'

Montrer que $A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ représente un projecteur orthogonal.

Solution :

Il suffit de constater que A est symétrique et que $A^2 = A$ ■

Exercice 9 : (Centrale)

On se donne 3 v.a X, Y, Z indépendantes et suivant une même loi uniforme $U(n)$.

- 1) Déterminer la loi, l'espérance mathématique et la variance de $X + Y$.
- 2) Donner la loi de $X + Y + Z$.
- 3) Préciser $\mathbb{P}(X + Y = Z)$.

Solution :

Exercice 10 : (Centrale)

Pour x à préciser, on pose $f(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos t + 1) dx$

- 1) Vérifier que f est définie sur \mathbb{R} et qu'elle est paire.
- 2) Montrer que, pour tout réel x , $f(x^2) = 2f(x)$. En déduire explicitement une expression de f (Distinguer les cas $|x| > 1$, $|x| < 1$ et $|x| = 1$).

Exercice 11 : (Centrale)

Soit f une fonction de classe C^1 de $[0, 2\pi]$ dans \mathbb{C}^* telle que $f(0) = f(2\pi)$. On pose $2i\pi a = \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt$.

- 1) Etablir que, pour $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) = f(0) \exp\left(\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt\right)$.
- 2) Prouver que a est un entier relatif.

- 3) Calculer ce nombre pour $f : t \rightarrow e^{int}$.
 4) Même question avec $f : t \rightarrow Re^{int} + (1 + i)$, où $R > 0$.

.....
Exercice 12 : (IMT)

Soient X, Y, Z trois v.a.d mutuellement indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre $1/3$.
 Que vaut $\mathbb{P}(X = Y = Z)$?

Exercice 13 : (Mines-Telecom)

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 4n - 1}{n + 2} x^n$?

.....

Exercice 14 : (Mines, 15 ' de préparation)

1) Résoudre dans \mathbb{R} , pour n entier naturel non nul, $y'' + y' + y = \frac{\cos(nx)}{n^3} = u_n(x)$.

2) Montrer que $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, est continue sur \mathbb{R} .

3) Résoudre dans $\mathbb{R} : y'' + y' + y = f$.

Exercice 15 : (Mines, direct)

Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left(\int_0^1 (\sqrt{t} - (at + b))^2 dt \right)$.

Exercice 16 : (Mines, 15 ' de préparation)

1) Pour $a > -1$, montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + a \sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$ à l'aide du changement de variable $x = tant$.

2) Nature en fonction du réel positif α de $\sum_{n \geq 0} \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$.

3) Même question pour $\sum_{n \geq 0} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$.

4) En déduire la nature de $\int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$.

Exercice 17 : (Mines direct et classique du concours)

Pour $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P)(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

- 1) Vérifier que l'on définit bien un endomorphisme de E .
 2) Montrer de plusieurs manières que f est diagonalisable.
 3) Trouver une base de diagonalisation de f .

Exercice 18 : Mines direct

Nature et somme de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

Exercice 19 : Mines avec préparation

On pose, pour $n \geq 1 : S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

- 1) Prouver que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.
 2) Etablir que $(S_n - 2\sqrt{n})$ converge vers un réel L dont on donnera le signe.
 3) Equivalent de $S_n - 2\sqrt{n} - L$?

Exercice 20 : Mines direct

Trouver une condition pour que $A \in O_3(\mathbb{R})$ soit triangulaire. Généraliser.

Exercice 21 : Mines direct

Nature de $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{x}} dx$?

.....

Exercice 22 : (X)

On se donne σ une bijection de \mathbb{N}^* sur lui-même et $\sum_{n \geq 1} u_n$ une STP.

- a) En revenant aux sommes partielles montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} u_{\sigma(n)}$ sont de même nature.

b) Déterminer les natures des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$.

c) Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

(Plus délicat) (Ind : Montrer que l'ensemble $k \in \{2n, \dots, 3n\}$ tels que $\sigma(k) \geq k$ possède au moins n éléments puis minorer le reste d'ordre $3n$).

Exercice 23 : (ENS)

1) Montrer que si m est un entier relatif, $m^3 - m$ est divisible par 3.

2) Soit $A \in M_2(\mathbb{Z})$, établir que $\text{tr}(A^3) - \text{tr}(A)$ est divisible par 3.

3) Généraliser à toute matrice carrée à coefficients dans \mathbb{Z} .

Exercice 24 : (X-ENS)

Une matrice carrée d'ordre n et à coefficients réels est dite de Bourdaud si les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de la matrice (avec nombre d'apparitions sur la diagonale correspondant à la multiplicité pour chaque valeur propre).

On note B_n leur ensemble.

1) B_n est-il convexe? Fermé?

2) Donner un élément de B_3 non triangulaire.

3) Quels sont les éléments de $B_n \cap S_n(\mathbb{R})$?

Exercice 25 : (X-ENS)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série absolument convergente dont la somme est notée S .

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$.

1) Prouver que $\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = S$.

2) Montrer que le résultat précédent reste vrai si la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ n'est que convergente.