

Test de Bienvenue (Corrigé partiel)

**Les cours, documents, calculatrices, téléphones ne sont pas autorisés.
La présentation, l'orthographe et la rédaction entrent dans une part significative de la notation.**

Questions de cours.(On précisera notations et contexte avec soin.)

- 1) Énoncer le théorème de Rolle.
- 2) Énoncer le théorème du rang.
- 3) Écrire tout ce que vous savez sur la loi binomiale.
- 4) Définition et dérivée de la fonction arctan.
- 5) Définition d'un endomorphisme.
- 6) Justifier l'encadrement suivant, valable pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Exercice 1. (Nombres complexes)

Démontrer l'équivalence suivante où z est un complexe :

11

$$\operatorname{Im}(z) > 0 \iff \left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 1.$$

Solution :

On peut donner une solution géométrique rapide. M est le point d'affixe z , I celui d'affixe i et J d'affixe $-i$.

Appartenir à la médiatrice de $[IJ]$ équivaut à $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = \frac{|z-i|}{|z+i|} = 1$ et on constate aisément que $IM < JM$ signifie que le point M est au dessus de cette médiatrice soit $\operatorname{Im}(z) > 0$ ■

Exercice 2. (Comparaison locale)

- 1) Équivalent en 0 et en $+\infty$ de $x \rightarrow \sin(x) - x + \sqrt{x}$.
- 2) Équivalent de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3. (Fonctions et trigo)

- 1) x étant un réel :
 $\cos^2(x) + \sin^2(x) = ?$ et $\sin(2x) = ?$.
- 2) Préciser le maximum et le minimum de la fonction $x \rightarrow \cos^4(x) + \sin^4(x)$.

Exercice 4. (Primitive)

- 1) Donner une primitive de $x \rightarrow \frac{x^2}{1+x^6}$.
- 2) Donner une primitive de $x \rightarrow \exp(\exp(x) + x)$.

Exercice 5. (Algèbre linéaire)

- (a) Définition et dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.
- (b) Prouver que $(X^k(1-X)^{3-k})_{0 \leq k \leq 3}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
- (c) En déduire la dimension de $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X) = P(1-X)\}$.

Solution :

- c) Posons $P_k = X^k(1-X)^{3-k}$ pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ et $P = \sum_{k=0}^3 a_k P_k$.
(On vérifie sans peine que $P_k(1-X) = P_{3-k}$).

On dispose donc (par unicité des composantes dans une base) de l'équivalence suivante :

$$P \in F \iff a_k = a_{3-k} \text{ pour } k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket.$$

Ainsi $F = Vect(P_0 + P_3, P_1 + P_2)$. Ce qui montre que F est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$ de dimension 2 ■

Exercice 6. (Algèbre linéaire)

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ suivant

$$f : (x, y, z) \rightarrow (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$$

- (a) Matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On la notera M .
- (b) M est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

Exercice 7. (Probabilités)

Au cours d'une expérience sur le comportement des animaux, des rats (volontaires et bien nourris) doivent choisir entre 4 portes d'apparence identique dont l'une est dite bonne et les trois autres mauvaises. Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat est reconduit à son point de départ et cela jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.

On examine deux situations.

- (a) Le rat n'a aucune mémoire.
Déterminer la probabilité que le rat sorte au bout de la septième fois.
- (b) Le rat possède une mémoire parfaite.
On note X le nombre d'essais effectués par le rat. Loi de X .

Solution :

On note A_k (resp. B_k) l'événement " le rat choisit la bonne porte au k-ième essai " (resp. l'événement il choisit une mauvaise porte au k-ième essai).

a) Dans ce contexte les événements précédents sont indépendants dans leur ensemble. Comme l'événement dont nous cherchons la probabilité est :

$$(\bigcap_{k=1}^6 B_k) \cap A_7, \text{ la probabilité voulue est } \left(\frac{3}{4}\right)^6 \times \frac{1}{4} = \frac{3^6}{4^7} = \frac{729}{16384}.$$

b) X est donc à valeurs dans $\llbracket 1, 4 \rrbracket$.

Bien sûr $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$.

$X = 2$ est en fait l'événement $B_1 \cap A_2$ mais ici plus d'indépendance et il faut faire intervenir les probabilités conditionnelles.

$$\mathbb{P}(A_2 \cap B_1) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(A_2 | B_1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \text{ (puisqu'une fois qu'une mauvaise porte est éliminée, la probabilité de trouver la bonne porte est } 1/3 \text{). En résumé } \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

On procède pareillement pour les autres issues et on trouve $1/4$ à chaque fois. Autrement dit X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ ■

Exercice 8. (Difficile ♦)

Questions indépendantes.

- (a) Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et F, G deux sous espaces vectoriels de E de même dimension. Etablir qu'ils possèdent un supplémentaire commun.
- (b) Montrer que pour $n \geq 2$ $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ n'est pas un entier.

Solution :

a) On pose $p = \dim(F) = \dim(G)$ et $m = n - p$ et allons prouver le résultat par récurrence sur m .

Si $m = 0$ alors $F = G = E$ et un supplémentaire commun est $\{0_E\}$.

Supposons la propriété vérifiée au rang m .

$F \cup G \neq E$ (car exo classique de première année F ou G devrait être égal à E) donc il existe x n'appartenant ni à F ni à G .

Posons $F' = F \oplus Vect(x)$ et $G' = G \oplus Vect(x)$. On peut appliquer à ces deux espaces notre hypothèse de récurrence donc il existe H supplémentaire commun à F' et G' .

Dès lors $H \oplus Vect(x)$ devient un supplémentaire commun à F et G et la récurrence se poursuit ■

b) On se donne $n \geq 2$ et considère l'entier naturel non nul p tel que $2^p \leq n < 2^{p+1}$. Pour tout entier naturel non nul $k \leq n$, on pose $k = 2^{a_k} q_k$, où q_k est impair et a_k est un entier naturel.

Dans ce contexte pour tout un tel $k \neq 2^p$, $a_k < p$.

Donc en réduisant au même dénominateur et en notant m le PPCM de tous les q_k :

$$H_n = \frac{\sum_{k=1}^n 2^{p-a_k} \frac{m}{q_k}}{2^p m}.$$

Cette fraction n'est pas un entier puisque le numérateur est impair et le dénominateur est pair ■

Barème approximatif : 1 pt par question .