Feuille d'exercices 1
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

(c) « Pour tout nombre réel positif y, il existe un nombre réel x dont le carré est égal à y. »
Cette assertion est vraie : soit $y \geq 0$. Alors $x = \sqrt{y}$ convient.

(d) « Il existe un nombre réel x tel que, pour tout nombre réel positif y, le carré de x est égal à y. »
Cette assertion est fausse. Pour le montrer, on prouve sa négation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \geq 0,\ y \neq x^2.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $y = x^2 + 1$ convient : on a bien $y \geq 0$ et $y \neq x^2$.

Exercice 2.

(a) À tout x dans I, la fonction f associe une valeur réelle y ; autrement dit, f est bien définie.

(b) Une même valeur réelle y est associée par f à tous les x dans I ; autrement dit, f est constante.

(c) Il existe un rang n_0 tel que tous les termes de la suite (u_n) sont égaux à u_{n_0} à partir du rang n_0 ; autrement dit, (u_n) est stationnaire.

(d) Pour chaque n dans $\mathbb{N}$, il existe un entier n_0 tel que, s'il est inférieur à n, alors u_n et u_{n_0} sont égaux ; ce qui ne dit rien sur la suite (pour n donné, il suffit de prendre $n_0 = n$).

Exercice 3.

(c) $\forall y \in \mathbb{R},\ (y^3 = x^3) \Rightarrow (x = y)$ (cette assertion est vraie)

(f) $\exists T \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+T} = u_n$.

Exercice 4.

(d) $\exists x_0 \in I,\ \forall x \in I,\ f(x_0) \leq f(x)$.
Négation : $\forall x_0 \in I,\ \exists x \in I,\ f(x_0) > f(x)$.

(e) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \leq M$.
Négation : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) > M$.

(f) $(\exists x \in I,\ f(x) = 0) \wedge (\forall x_1, x_2 \in I,\ f(x_1) = f(x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2)$
Négation : $(\forall x \in I,\ f(x) \neq 0) \vee (\exists x_1, x_2 \in I,\ (f(x_1) = f(x_2) = 0) \wedge x_1 \neq x_2))$.

Exercice 5.

(a) Ensemble des fonctions majorées

(b) Ensemble vide : pour x donné, l'inégalité est fausse pour $A = f(x) - 1$ par exemple.

(c) Ensemble des fonctions non minorées (considérer la négation)

(d) Ensemble de toutes les fonctions : l'inégalité est vraie pour $x = 0$ et $A = f(0) + 1$ par exemple.

Exercice 6.

(e) Vrai : on raisonne par contraposée. Soient $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, supposons que $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{y+1}{y-1}$. Alors $(x+1)(y-1) = (y+1)(x-1)$, donc $y - x = x - y$, donc $x = y$.

(f) Vrai : Soit $N \in \mathbb{N}^*$, alors $n = N$ convient. En effet, on a alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{N(N+1)}{2} \geq N$.

(g) Vrai : $n = 2,\ x = 3,\ y = 4,\ z = 5$ conviennent : $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$.

Exercice 16. On procède par récurrence simple.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ l'assertion « $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$. »

- $\dfrac{2}{2 \times 0 + 1} = 2 = u_0$, donc $P(0)$ est vraie,
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$, et montrons $P(n+1)$. Par hypothèse de récurrence : $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$, donc :
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+3},$$
donc $P(n+1)$ est vraie. Donc P est héréditaire.

On a bien montré : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

Exercice 17. On procède par récurrence double.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ l'assertion « $u_n = 3^n - 2^n$. »

- $3^0 - 2^0 = 0 = u_0$, donc $P(0)$ est vraie ; $3^1 - 2^1 = 1 = u_1$, donc $P(1)$ est vraie,
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$, et montrons $P(n+2)$. On a :
$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 6(3^n - 2^n) = 9 \times 3^n - 4 \times 2^n = 3^{n+2} - 2^{n+2},$$
donc $P(n+2)$ est vraie. Donc P est héréditaire.

On a bien montré : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

Exercice 18. On procède par récurrence triple.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ l'assertion « $u_n = n(n-1)$. »

- $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies (calcul direct)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$, $P(n+1)$ et $P(n+2)$. Alors, par hypothèse de récurrence :
$$u_{n+3} = 3(n+1)(n+2) - 3n(n+1) + n(n-1) = (n+2)(n+3),$$
donc $P(n+3)$ est vraie. Donc P est héréditaire.

On a bien montré : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

Exercice 19. On procède par récurrence double.
Notons, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion « $1 \leq u_n \leq n^2$. »

- $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies (calcul direct)
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$. Alors, par hypothèse de récurrence :
$$1 + \frac{1}{n+1} \leq u_{n+2} \leq (n+1)^2 + \frac{n^2}{n+1}.$$
Or $1 \leq 1 + \dfrac{1}{n+1}$, donc $1 \leq u_{n+2}$, et :
$$(n+1)^2 + \frac{n^2}{n+1} \leq (n+2)^2 \Leftrightarrow \frac{n^2}{n+1} \leq (n+2)^2 - (n+1)^2 = 2n+3 \Leftrightarrow n^2 \leq (n+1)(2n+3),$$
où la dernière inégalité est vraie, donc par équivalence, la première également ; donc $u_{n+2} \leq (n+2)^2$. Donc $P(n+2)$ est vraie. Donc P est héréditaire.

On a bien montré : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.