

**Durée de l'épreuve : 2h**

**Aucun document autorisé - L'usage de la calculatrice est interdit**

Cet énoncé comporte 6 pages numérotées de 1 à 8. **Attention à bien rendre les documents réponses en mettant votre nom.** Les résultats doivent être encadrés. L'écriture ne doit pas être au crayon à papier. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Il est conseillé de lire la totalité de l'énoncé avant de commencer l'épreuve.

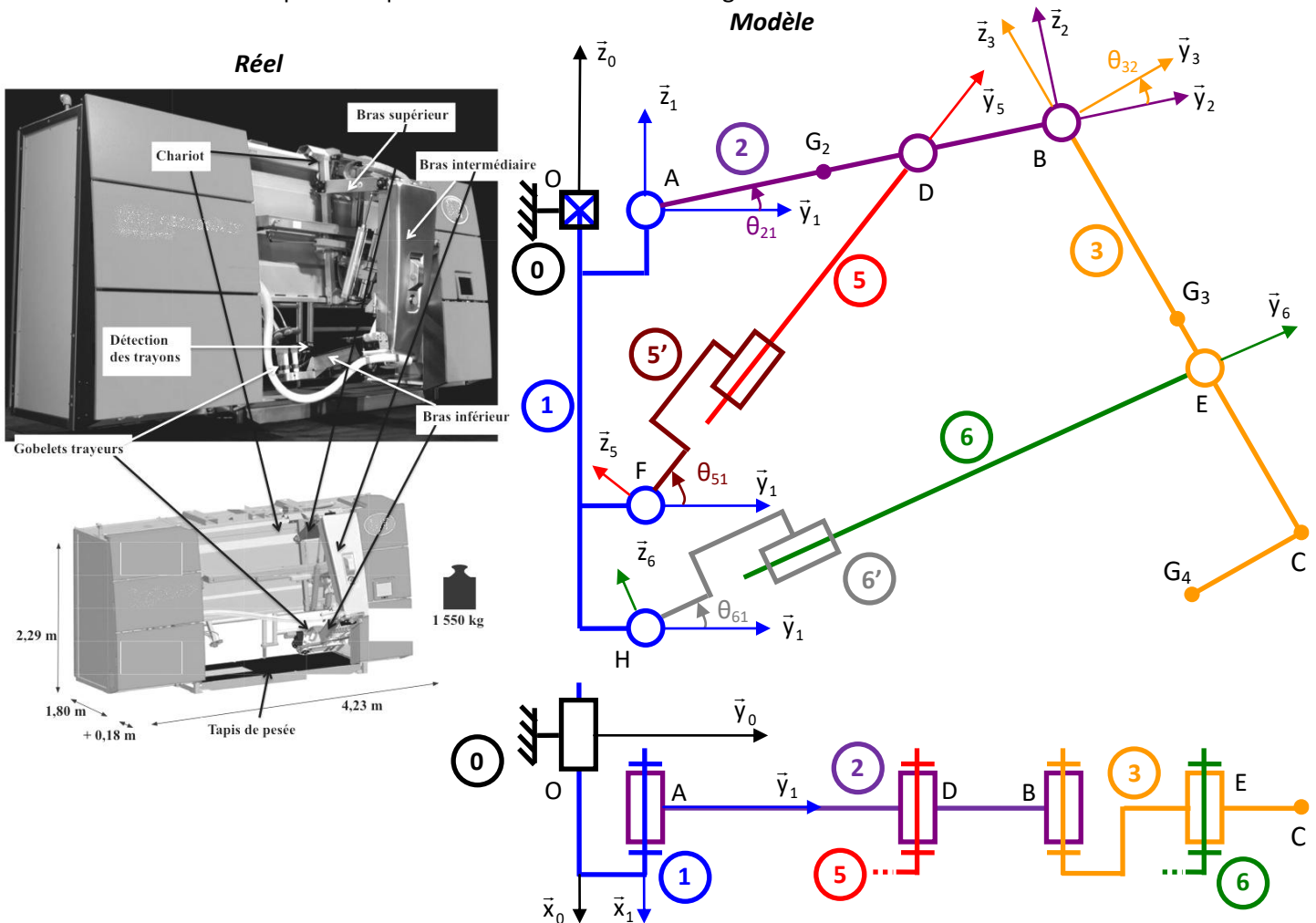
## Trayeuse automatique pour vaches

Les agriculteurs producteurs laitiers sont soumis à des réglementations strictes en termes de respect de l'environnement, de mesures d'hygiène ou de qualité de vie des animaux. De plus la traite des vaches est une opération pénible, répétitive et soumise à des horaires contraignants.

D'autre part, les agriculteurs souhaitent désormais disposer de plus de temps pour gérer leur exploitation agricole et pouvoir concilier vie professionnelle et personnelle. Dans cette optique, des sociétés ont développé des systèmes de traite automatique.



On s'intéresse dans ce sujet à un bras articulé d'une machine de traite automatisée dont on donne une modélisation cinématique ainsi qu'un extrait de cahier des charges.



L'ensemble bras articulé de traite est embarqué sur le chariot 1 monté en liaison glissière d'axe  $(0, \vec{x}_0)$  par rapport au bâti 0. Cette liaison permet le déplacement horizontal du bras articulé. Le bras articulé est ensuite composé :

- Du bras supérieur 2 en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  par rapport au chariot 1. Deux vérins montés en parallèle (seul un des vérins est modélisé ici par l'ensemble corps de vérin 5' + tige de vérin 5) entre le chariot 1 et le bras supérieur 2 assurent les déplacements du bras supérieur 2 ;
- Du bras intermédiaire 3, lié au bras supérieur 2 par une liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_2)$ . Un vérin (ici par l'ensemble corps de vérin 6' + tige de vérin 6) monté entre le bras intermédiaire 3 et le chariot 1 assure les déplacements du bras intermédiaire 3 ;
- D'un bras inférieur en liaison complète (encastrement) avec le bras intermédiaire 3. Ce bras inférieur porte le système de branchement aux pis, le système pulsateur, le système de nettoyage par brosses et la tête de traite.

Lorsque la vache est installée dans la machine, la tête de traite est automatiquement positionnée sous la vache, dans une position telle que la tête de traite soit au plus proche des pis de la vache. Par simplification, on modélisera par un point nommé  $G_4$  (cf. modèle schéma cinématique), la zone de contact de la tête de traite du bras inférieur avec les pis de la vache.

### Données :

$R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  repère lié au bâti du robot de traite, supposé galiléen ;

$R_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  repère lié au chariot 1 tel que  $\vec{OA} = x(t) \cdot \vec{x}_0 + L_1 \cdot \vec{y}_1$  ;

$R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  repère lié au bras supérieur 2 tel que  $\theta_{21} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$  ;

$R_3 = (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  repère lié au bras intermédiaire 3 tel que  $\theta_{32} = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$  ;

$R_5 = (F, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  repère lié au vérin de tige 5 et de corps 5' tel que  $\theta_{51} = (\vec{y}_1, \vec{y}_5) = (\vec{z}_1, \vec{z}_5)$  ;

$R_6 = (H, \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$  repère lié au vérin de tige 6 et de corps 6' tel que  $\theta_{61} = (\vec{y}_1, \vec{y}_6) = (\vec{z}_1, \vec{z}_6)$ .

$\vec{AB} = L_2 \cdot \vec{y}_2$	$\vec{AD} = d_2 \cdot \vec{y}_2$	$\vec{BC} = -L_3 \cdot \vec{z}_3$	$\vec{BE} = -d_3 \cdot \vec{z}_3$
$\vec{AG}_2 = \frac{L_2}{2} \cdot \vec{y}_2$	$\vec{BG}_3 = -\frac{L_3}{2} \cdot \vec{z}_3$	$\vec{CG}_4 = -L_4 \cdot \vec{y}_3$	$\vec{AF} = -h_5 \cdot \vec{z}_0$
$\vec{AH} = -h_6 \cdot \vec{z}_0$	$\vec{OA} = x(t) \cdot \vec{x}_0 + L_1 \cdot \vec{y}_1$	$\vec{FD} = L_5(t) \cdot \vec{y}_5$	$\vec{HE} = L_6(t) \cdot \vec{y}_6$

Exigences	Critères	Niveaux
Le système doit respecter les exigences techniques suivantes	... Vitesse d'approche verticale de la tête de traite par rapport aux pis de la vache ...	... $V < 5 \pm 1 \text{ cm/s}$ ...

## A. Analyse du système

**Q.1.** Donner les paramètres géométriques qui permettent de piloter les mouvements du bras robotisé ?

**Q.2.** Tracer le graphe des liaisons associé à la modélisation représentée par le schéma cinématique page précédente.

**Q.3.** Etablir les 4 figures de changement de base (figures géométrales) représentant le paramétrage angulaire.

**Q.4.** Représenter sur le document réponse le système lorsque les bras 2 et 3 sont en position horizontale. Donner la longueur finale des deux vérins (5 et 5') et (6 et 6') sur la figure pour cette position.

## B. Etude cinématique

Dans toute cette partie on considère que  $\boxed{x(t) = \text{cte}}$ .

**Q.5.** Calculer, par calcul direct, le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V_{B,2/0}}$ .

**Q.6.** Calculer par calcul direct le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V_{E,3/0}}$ .

**Q.7.** Retrouver, par composition des vitesses et champ des vitesses, le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V_{B,2/0}}$ .

**Q.8.** Retrouver, par composition des vitesses et champ des vitesses le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V_{E,3/0}}$ .

**Q.9.** Ecrire la fermeture géométrique (AFD).

**Q.10.** Après avoir projeté dans  $B_0$ , déduire une relation scalaire entre  $\theta_{21}$  et  $L_5(t)$ .

**Q.11.** Donner l'expression du vecteur vitesse  $\overrightarrow{V_{G_4,3/0}}$ .

**Q.12.** Donner l'expression du vecteur accélération  $\overrightarrow{a_{G_4,3/0}}$ .

Pour la phase d'approche du bras inférieur vers la vache on a  $\theta_{21} = 0$  ;  $\theta_{32} = 0$  et on a  $\dot{\theta}_{21} = \dot{\theta}_{32} = -0,3 \text{ rad/s}$ . On donne  $L_2 = 1,5 \text{ m}$  et  $L_4 = 0,65 \text{ m}$ .

**Q.13.** Calculer la norme de la composante verticale de la vitesse  $\overrightarrow{V_{G_4,3/0}}$  et conclure vis-à-vis du critère vitesse d'approche du cahier des charges.

## C. Asservissement

On souhaite asservir le déplacement de chacun des vérins. Ceux-ci sont constitués de moteurs électriques suivis de réducteur Harmonic Drive puis de systèmes vis/écrou. Le moteur est un moteur à courant continu alimenté par une tension  $u_m(t)$  et le réducteur permet d'adapter la vitesse de rotation telle sorte que la vitesse de rotation de la vis  $\omega_v$  soit 50 fois plus petite que la vitesse de rotation du moteur  $\omega_m$ . Le paramètre de translation de sortie  $x_s$  de l'écrou est lié au paramètre de rotation de la vis en fonction du pas de la vis. Le déplacement de la tige n'est pas directement mesuré en sortie de tige mais un codeur absolu permet de mesurer la rotation de la vis  $\theta_v$ , son gain est  $K_c$ . Enfin, un adaptateur permet de transformer la consigne de déplacement  $x_c$  issue de l'ordinateur principal en tension de consigne  $u_c$  qui sera ensuite comparée à la tension mesurée par le capteur. Dans un premier temps, on commence par placer un correcteur proportionnel, tel que  $C(p) = K_{cor}(p) \cdot \varepsilon(p)$

Voici les équations issues du modèle de connaissance du moteur et des autres composants :

$u_m(t) = e(t) + R \cdot i(t)$	$u_m(t)$ = Tension du moteur	[V]
$e(t) = K_e \cdot \omega_m(t)$	$e(t)$ = Force contre électromotrice du moteur	[V]
$J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t)$	$i(t)$ = Intensité dans le moteur	[A]
$C_m(t) = K_t \cdot i(t)$	$C_m(t)$ = Couple exercé par le moteur	[N.m]
	$C_r(t)$ = Couple résistant sur l'axe moteur	[N.m]
$\omega_m = 50 \cdot \omega_v$	$\omega_m(t)$ = Vitesse angulaire du moteur	[rad/s]
$x_s = \theta_v \cdot \text{pas} / (2\pi)$	$R$ = Valeur de la résistance	[Ω]
$u_{mes} = K_c \cdot x_s$	$K_e$ = Coefficient de la force contre électromotrice	[V/(rad/s)]
$U_m(p) = K_{cor}(p) \cdot \varepsilon(p)$	$J$ = Inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur	[kg.m <sup>2</sup> ]
	$K_t$ = Constante de couple	[N.m/A]

**Q.14.** Mettre les équations dans le domaine de Laplace, dans les conditions de Heaviside et montrer que la fonction de transfert du moteur  $H_{mot}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$  est un premier ordre  $\frac{K_{mot}}{1+\tau \cdot p}$  où l'on identifiera les valeurs caractéristiques  $K_{mot}$  et  $\tau$  (on pourra s'aider d'un schéma bloc du moteur dessiné à partir des équations du moteur)

**Q.15.** Compléter le schéma bloc du document réponse DR2 et calculer le gain de l'adaptateur en fonction des autres paramètres afin que le système soit bien asservi.

**Q.16.** Calculer la fonction de transfert totale  $H(p) = \frac{X_s(p)}{X_c(p)}$  et la mettre sous forme canonique.

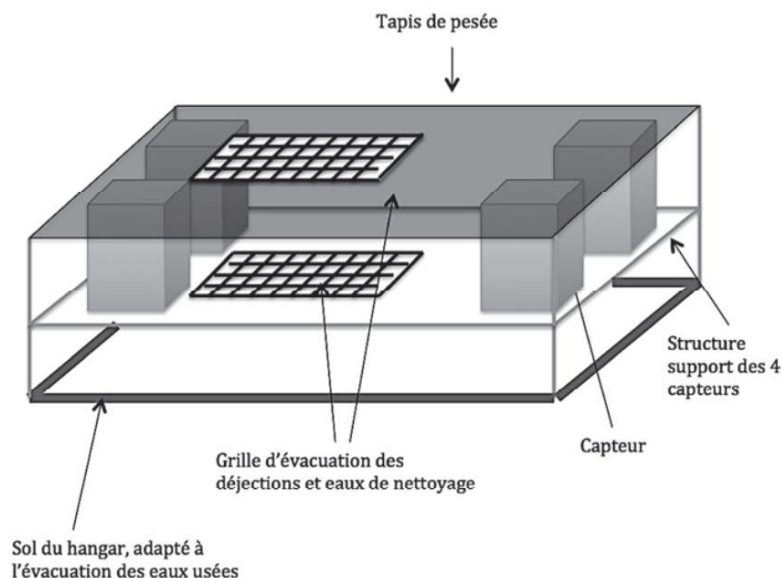
**Q.17.** Sur le document réponse DR3 est le diagramme de Bode de la FTBO, que l'on nommera  $H_2(p)$ , tracer les asymptotes et identifier l'ordre et la classe de cette fonction de transfert. Identifier ensuite les valeurs caractéristiques.

**Q.18.** On remplace le correcteur  $C(p)$  par un PI (Proportionnel Intégrale) de fonction de transfert  $C(p) = \frac{10+5p}{p}$ . Tracer sur le DR4 le diagramme de Bode asymptotique PUIS l'allure de la fonction de transfert égale à  $C(p) \cdot H_2(p)$

## D. Etude d'un capteur de pesée

*Objectif : vous allez vérifier que les capteurs permettant d'acquérir la masse de la vache sont conformes aux critères exigés par le cahier des charges. Ensuite, vous vérifierez que l'information délivrée par ces capteurs est indépendante de la position de la vache sur le tapis de pesée. Enfin, vous étudierez l'implantation de ces capteurs sur le système « robot de traite » (liaison complète démontable).*

Lorsqu'elle est dans le box, la vache est sur un tapis de pesée, schématisé **figure suivante**. Ce tapis de pesée est constitué d'une structure rigide (caillebotis métallique) liée au support des capteurs (bâti tubulaire mécanosoudé) et d'un revêtement antidérapant en caoutchouc.



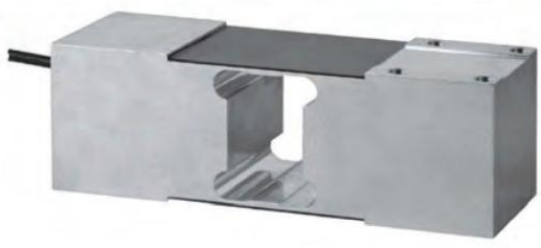
Revêtement antidérapant : dimensions : 2 500 mm × 1 000 mm × 10 mm ;

matériau constitutif : caoutchouc recyclé (masse volumique de 900 kg/m<sup>3</sup>).

Structure rigide : dimensions : 2 500 mm × 1 000 mm × 20 mm ;

matériau constitutif : acier galvanisé (pour l'épaisseur donnée, cette structure a une masse surfacique de 15 kg/m<sup>2</sup>) ;

**Grille d'évacuation :** dimensions : 700 mm × 500 mm × 20 mm ;  
matériau constitutif : acier galvanisé (pour l'épaisseur donnée, cette grille a une masse surfacique de 15 kg/m<sup>2</sup>).  
4 capteurs identiques de pesée à appui central se trouvent sous ce tapis de pesée. Les caractéristiques de ces capteurs sont données dans le tableau 1 suivant :

	<b>Poids, y compris emballage</b> - 2 kg
	<b>Applications</b> - Balances sur table, plateforme au sol, convoyage et applications médicales
	<b>Particularités</b> - Gamme étendue de capacités nominales de 30 kg jusqu'à 750 kg

**Tableau 1 : caractéristiques des capteurs**

**Q.19.** Sachant qu'une vache a une masse de 700kg en moyenne et connaissant les caractéristiques des 4 capteurs utilisés, peut-on négliger la masse du tapis de pesée (structure rigide et revêtement antidérapant) et respecter le cahier des charges ? Vous justifierez vos réponses par calcul. Quelle(s) opération(s) devra réaliser l'installateur lors de la mise en service du tapis ?

Hypothèse : nous n'étudierons le **comportement** que d'un seul capteur **C**. Comme hypothèse de travail, nous considérerons que le poids total  $P$  de la vache est la somme des 4 poids relevés par chacun des 4 capteurs. Pour la suite des calculs, la masse du tapis de pesée ne sera pas prise en compte.

**ATTENTION :** vous devez travailler dans le repère indiqué sur la **figure 12**

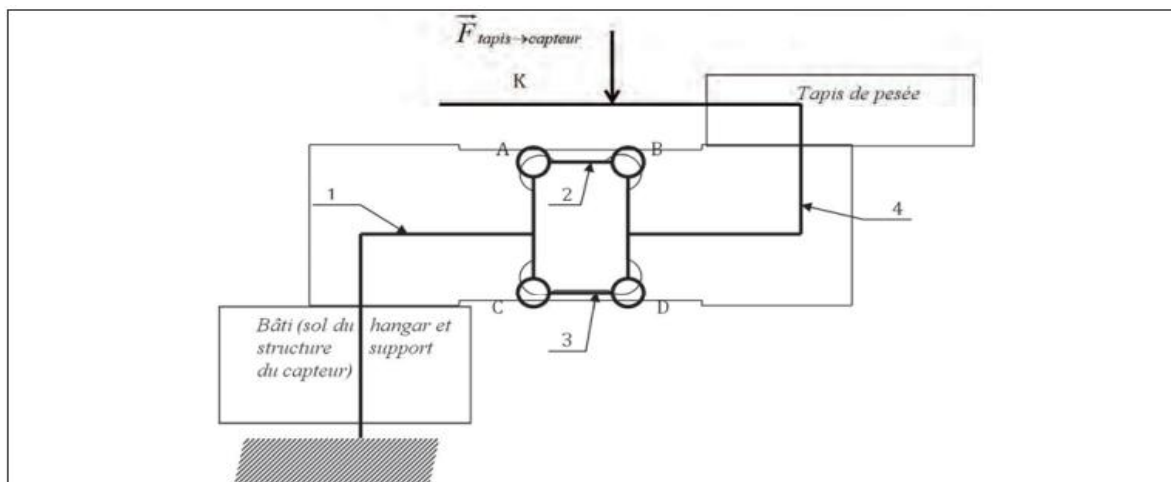
Notations torseur de l'action mécanique de  $i$  sur  $j$  :

En ligne :

En colonne :

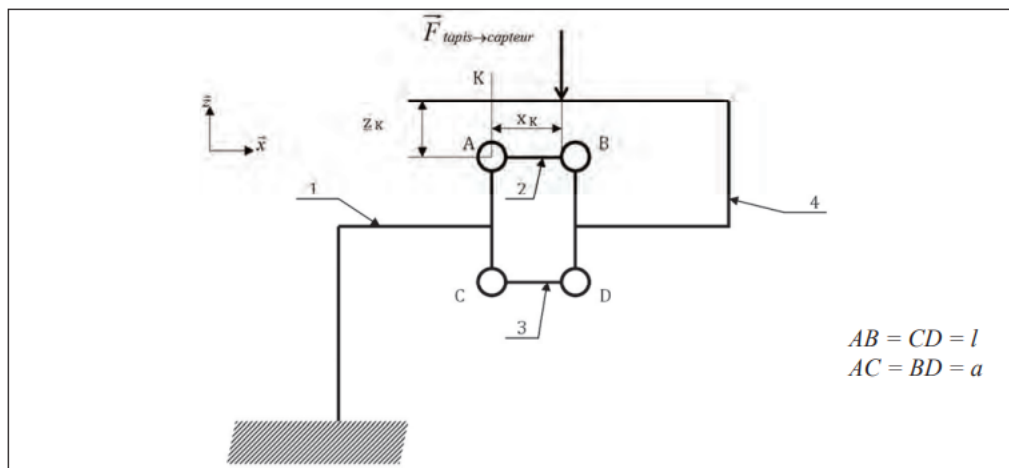
$$\left\{ \tau_{i \rightarrow j} \right\} = \begin{Bmatrix} \overline{R_{i \rightarrow j}} = X_{ij} \vec{x} + Y_{ij} \vec{y} + Z_{ij} \vec{z} \\ \overline{M_{N, i \rightarrow j}} = L_{ij} \vec{x} + M_{ij} \vec{y} + N_{ij} \vec{z} \end{Bmatrix}_N \quad \left\{ \tau_{i \rightarrow j} \right\} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{( \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} )}$$

Lorsque la vache arrive sur le tapis de pesée, nous ne connaissons pas la position de son centre de gravité  $G$ .



**Figure 11 : modélisation d'un capteur de pesée**

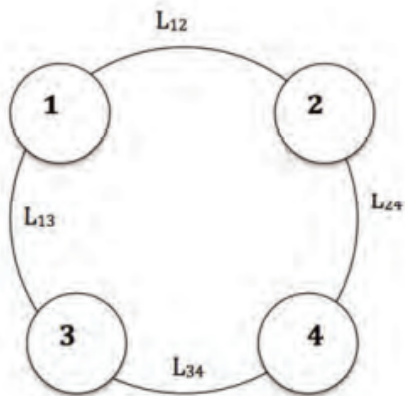


Figure 12 : modélisation et paramétrage d'un capteur de pesée dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ 

Le capteur réel peut être modélisé par une structure parallélogramme 4 barres qui sont liées par 4 liaisons pivots élastiques en A, B, C et D.

Pour que la mesure donnée par le capteur soit indépendante de la position de G (centre de gravité de la vache), le comportement du capteur ne doit pas dépendre de la position de la droite d'action de  $\vec{F}_{\text{tapis} \rightarrow \text{capteur}}$ , donc de la position du point K.

Le graphe des liaisons correspondant à cette modélisation est le suivant :



$L_{12}$  : liaison pivot d'axe  $(A, \vec{y})$ .

$L_{13}$  : liaison pivot d'axe  $(C, \vec{y})$ .

$L_{24}$  : liaison pivot d'axe  $(B, \vec{y})$ .

$L_{34}$  : liaison pivot d'axe  $(D, \vec{y})$ .

Coordonnées de K dans le plan  $(A, \vec{x}, \vec{z})$  :  $(x_K, z_K)$ .

Dans cette première modélisation, seule la liaison pivot en A est considérée comme une liaison pivot élastique (on a alors une composante  $C_{eA}$  portée par l'axe  $(A, \vec{y})$ ), les autres liaisons pivots en B, C et D sont parfaites. Nous retenons un modèle d'étude plan et le torseur de l'action mécanique de 1 sur 2 s'écrit :

$$\left\{ \tau_{1 \rightarrow 2} \right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} = X_{12} \cdot \vec{x} + Z_{12} \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{A, 1 \rightarrow 2}} = C_{eA} \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}_A$$

**Q.20.** Montrer, en dessinant les actions élémentaires, que le torseur d'action mécanique du tapis de pesée sur le capteur au point K est de la forme :

$$\left\{ \tau_{\text{tapis} \rightarrow \text{capteur}} \right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{t \rightarrow c}} = Z_{tc} \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{K, t \rightarrow c}} = M_K \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}_K$$

La technologie du capteur permet de mesurer  $C_{eA}$ . Nous souhaitons vérifier qu'il existe une relation

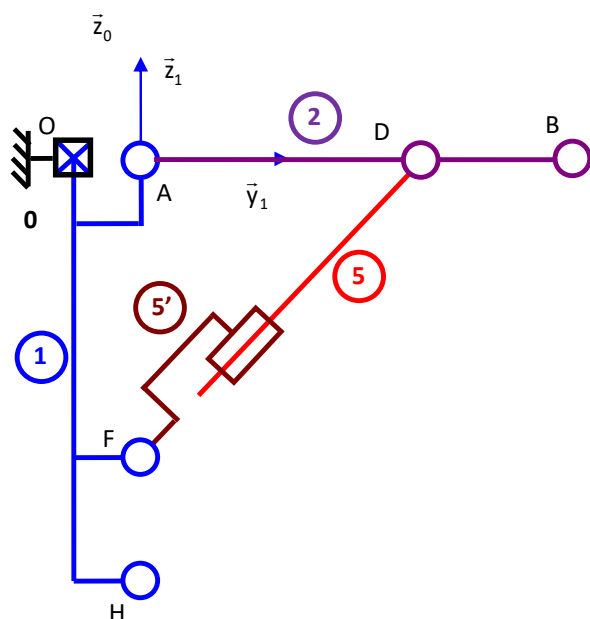
$$\|\vec{F}_{\text{tapis} \rightarrow \text{capteur}}\| = f(C_{eA}) \text{ indépendante de } M_K.$$

**Q.21.** En choisissant les isolements judicieux, trouver la relation  $\|\vec{F}_{\text{tapis} \rightarrow \text{capteur}}\| = f(C_{eA})$ . Conclure.

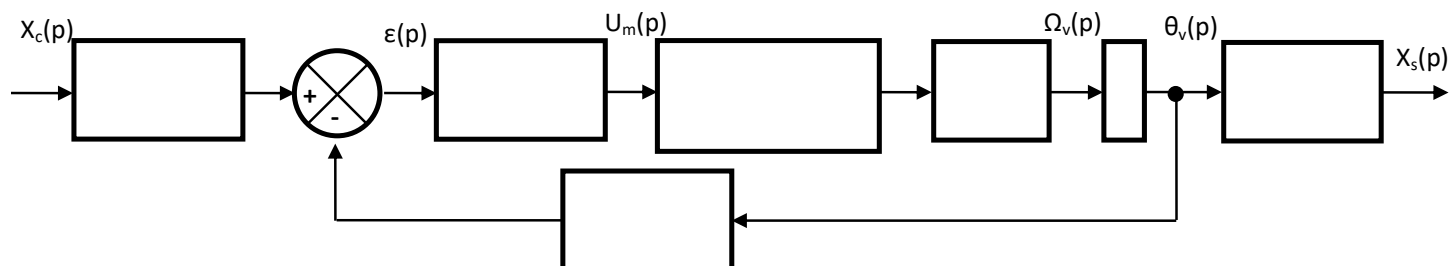
NOM :

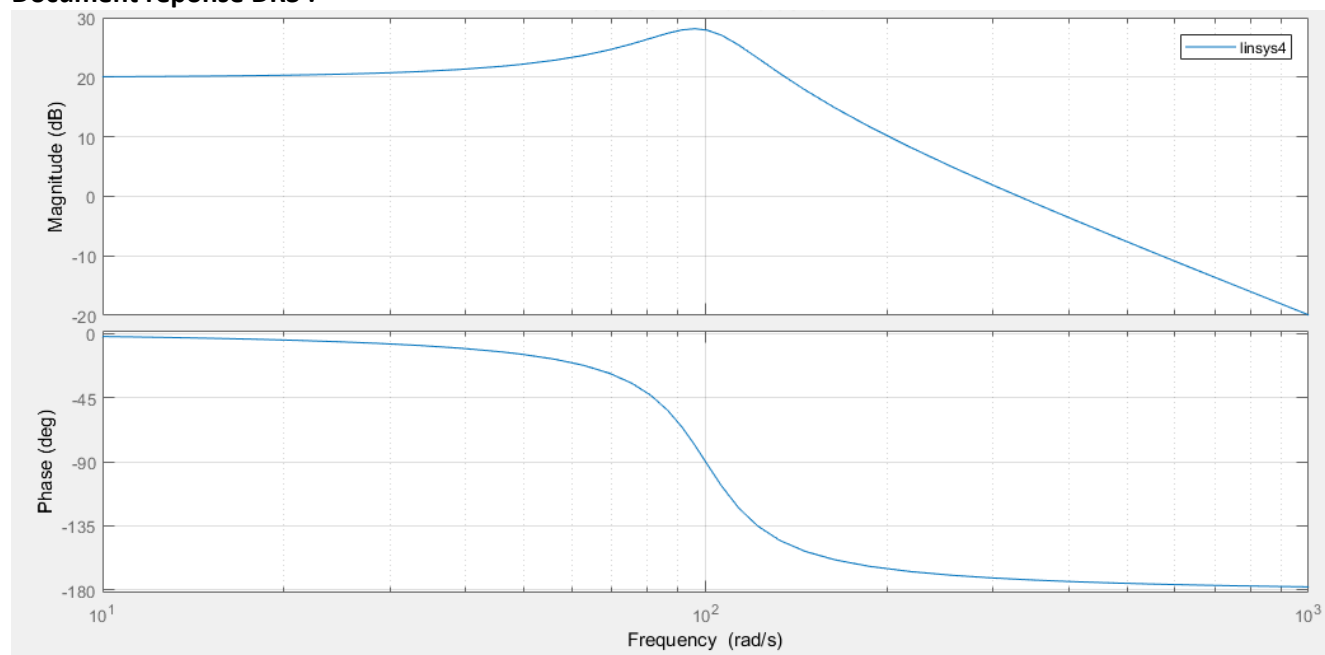
Prénom :

## Document réponse DR1 :



## Document réponse DR2 :



**Document réponse DR3 :****Document réponse DR4 :**