DS2 Skypod – Corrigé
(sujet CCINP MP 2024)

Q1. À l'aide de la condition de roulement sans glissement en I, donner la relation entre V(t), $\omega_{21}(t)$ et $\omega_{10}(t)$.

$$\overrightarrow{V(I,2/0)} = \overrightarrow{V(I,2/1)} + \overrightarrow{V(I,1/0)} = \vec{0}$$

Or $\overrightarrow{V(I,2/1)} = \overrightarrow{V(A,2/1)} + \overrightarrow{IA} \wedge \omega_{21}\vec{z}_1 = R\vec{y}_1 \wedge \omega_{21}\vec{z}_1 = R\omega_{21}\vec{x}_1$

et $\overrightarrow{V(I,1/0)} = \overrightarrow{V(O_1,1/0)} + \overrightarrow{IO_1} \wedge \omega_{10}\vec{y}_0$

$= V(t)\vec{x}_1 + \left(R\vec{y_0} + \frac{L}{2}\vec{z}_1\right) \wedge \omega_{10}\vec{y}_0 = \left(V(t) - \frac{L}{2}\omega_{10}\right)\vec{x}_1$

On en déduit que $V(t) = \frac{L}{2}\omega_{10} - R\omega_{21}$.

Barème (5pt max) : 1pt pour expression RSG $\overrightarrow{V(I,2/0)} = \vec{0}$, 1pt pour composition des vitesses, 1pt pour $\overrightarrow{V(I,2/1)}$, 1pt pour $\overrightarrow{V(I,1/0)}$, 1pt pour résultat final. Remarque : -0.5pt par erreur de signe ;

Q2. Par un raisonnement analogue, donner la relation entre V(t), $\omega_{31}(t)$ et $\omega_{10}(t)$.

On obtient $V(t) = \frac{-L}{2}\omega_{10} - R\omega_{31}$.

Barème (2pt max) : 1pt pour cohérence avec Q2, 1pt pour résultat final.

Q3. En déduire $\omega_{10}(t)$ en fonction de $\omega_{21}(t)$ et $\omega_{31}(t)$.

On en déduit que $\frac{L}{2}\omega_{10} - R\omega_{21} = \frac{-L}{2}\omega_{10} - R\omega_{31}$ donc $\omega_{10} = \frac{R}{L}(\omega_{21} - \omega_{31})$.

Barème (2pt max) : 1pt égalité des deux expressions, 1pt pour résultat final juste.

Q4. Démontrer que pour une trajectoire en ligne droite, $\omega_{21}(t) = \omega_{31}(t)$. En déduire $\omega_{moy}(t)$ et donner sa valeur.

En ligne droite, $\omega_{10} = 0$ ➔ $\omega_{21} = \omega_{31} = \omega_{moy}$. À l'aide des questions 2 ou 3, on obtient V(t) = 2m/s = -R ω_{moy} . D'où ω_{moy}=-V(t)/R =-2/0.02= -100 rad/s.

Barème (3pt max) : 1pt pour $\omega_{10} = 0$, 1pt pour expression littérale, 1pt pour valeur numérique juste (TOR).

Q5. Donner dans ces conditions la valeur de l'accélération angulaire $\dot{\omega}_{10}(t)$ en fonction de $\dot{\omega}_{21}(t)$.

On dérive l'expression obtenue en Q4, et en remplaçant $\dot{\omega}_{31}$ par $-\dot{\omega}_{21}$ on obtient $\dot{\omega}_{10} = \frac{2R}{L}\dot{\omega}_{21}$

Barème (2pt max) : 1pt pour dérivation Q4, 1pt pour résultat juste.

Q6. En faisant l'hypothèse que $t_1 = 0$, donner les expressions littérales de t2, de t3 et de t4 en fonction de ω_{10max} et de γ_{10}.

De la phase 2 on obtient $t_2 = \omega_{10max}/\gamma_{10}$. Les phases d'accélération et décélération sont égales au signe près : $t_2=t_4-t_3$.
De plus l'aire sous le trapèze vaut 90°, soit $\pi/2$ rad : $\pi/2 = (\omega_{10max}/2)*(t_4-t_1+t_3-t_2)$
d'où $\pi/2 = \omega_{10max} \cdot t_3 \rightarrow t_3 = \pi/(2.\ \omega_{10max})$
Enfin $t_4=t_3+t_2 = \pi/(2.\ \omega_{10max}) + \omega_{10max}/\gamma_{10}$

Barème (4 pt max) : 1pt pour t_2, 2 pt pour t_3(1pt pour aire totale, 1pt pour valeur), 1pt pour t_4.

Q7. À l'aide des figure 10 et figure 11, commenter l'influence de ω_{10max} sur la trajectoire du robot lors d'un virage.

Plus ω_{10max} est grand, plus le robot tourne vite (le rayon de courbure diminue) et la trajectoire est plus courte entre le point de départ et le point de fin du virage. En revanche cette augmentation entraîne une augmentation des phases 1 et 3, phases où la trajectoire n'est pas circulaire. Ainsi l'augmentation de ω_{10max} entraîne une trajectoire moins circulaire.

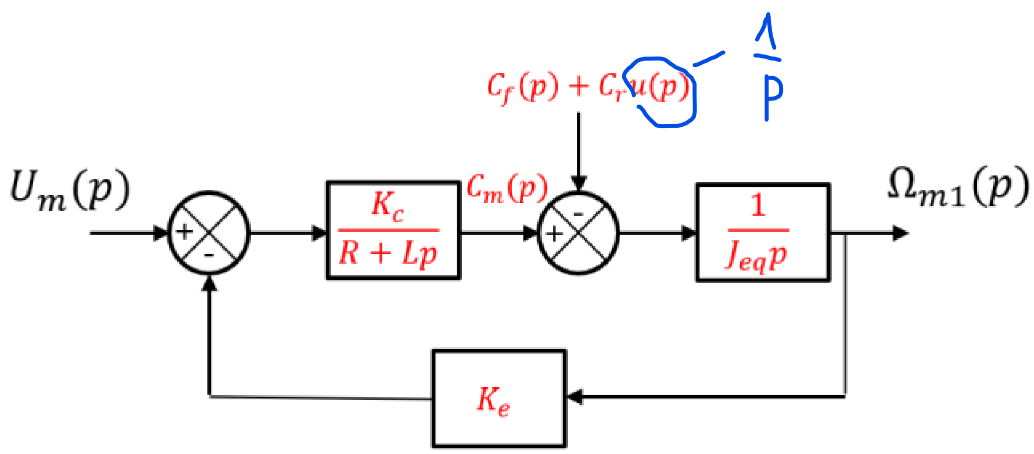
Barème (2 pt max) : 1pt pour influence sur la distance parcourue, 1pt pour circularité de la trajectoire.

Q8. Mobilité pour isostatique ?

H=Is + m - 6(N-1) → m=H- (5*2 (pivot)+ 2*1 (ponctuelle)) + 6*3 → si H=0, m=6
Il y a 2 moteurs (1 pour chaque pignon) d'où les 2 mobilités utiles
Les 4 mobilités internes sont dues aux modélisations de ponctuelles : quand les pignons ne peuvent pas tourner (mu bloqué) 2 translations sont libres (sur et x et z) et 2 rotations (autour de y et de x)

Barème (3pt) : 1pt pour le calcul avec formule ; 2pt pour justifications des mobilités

Q9. Compléter les blocs du **DR1** au niveau des « ... », avec les fonctions de transfert et variables manquantes dans le schéma-blocs du moteur.



Barème (4 pt max) : 1 pt par bloc (TOR), 1pt pour signaux (TOR)

Q10 En se plaçant à l'équilibre statique, et en précisant la démarche, déterminer les expressions de Y_g et Y_d en fonction de m_s, g, L, R_p et de x_{G_S} . On rappelle que l'angle α est supposé très petit.

On applique le PFS en statique à l'ensemble S :

$$\text{TRS sur } \vec{y}_0 : Y_g + Y_d - m_s g = 0$$

$$\text{TMS en } C_g \text{ sur } \vec{z}_0 : \left(\overrightarrow{C_g C_d} \wedge \overset{Y_d}{\cancel{-m_s g}} \vec{y}_0\right).\vec{z}_0 + \left(\overrightarrow{C_g G_s} \wedge -m_s g \vec{y}_0\right).\vec{z}_0 = 0$$

Avec $\overrightarrow{C_g C_d} \wedge \underset{Y_d}{\cancel{-m_s g}} \vec{y}_0 = (L + 2R_p)cos(\alpha) Y_d.\vec{z}_0$

$$\overrightarrow{C_g G_s} \wedge -m_s g \vec{y}_0 = \left(\overrightarrow{C_g O_g} + \overrightarrow{O_g O_S} + \overrightarrow{O_s G_S}\right) \wedge -m_s g \vec{y}_0$$
$$= \left(\left(R_p + \frac{L}{2} + x_{G_S}\right)\overrightarrow{x_r} + (-a + y_{G_S})\overrightarrow{y_r}\right) \wedge -m_s g \vec{y}_0$$
$$= -m_s g \left(\left(R_p + \frac{L}{2} + x_{G_S}\right) cos\alpha - (-a + y_{G_S}) sin\alpha\right) \vec{z}_0$$

Soit

$$Y_d = \frac{m_s g}{L + 2R_p}\left(\left(R_p + \frac{L}{2} + x_{G_S}\right) - (-a + y_{G_S}) tan(\alpha)\right)$$

Comme ici α est très petit $tan(\alpha) \approx 0$:

$$Y_d = \frac{m_s g}{(L + 2R_p)}\left(R_p + \frac{L}{2} + x_{G_S}\right)$$

$$Y_g = -Y_d + m_s g = \frac{m_s g}{(L + 2R_p)}\left(R_p + \frac{L}{2} - x_{G_S}\right)$$

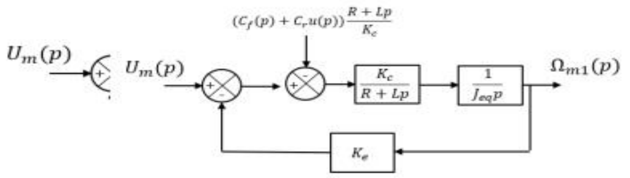
Barème (6 pt max) : 1pt pour énoncé PFS à bon ensemble + point, 1 pt pour relation issue TRS, 2 pt pour expression TMS (1 pt si erreur de signe), 1 pt pour $tan(\alpha) \approx 0$, 1 pt expression finale (même si erreur de signe issue du TMS et même si l'élève à garder $tan(\alpha) \approx \alpha$ au lieu de 0. En revanche 0 point si le candidat a gardé $tan(\alpha)$ sans simplification)

Q11. En déduire l'expression des couples C_r^g et C_r^d

Les frottements étant pris en compte par Cf, on néglige ici les frottements, donc :
$C_r^g = -R_p Y_g$ et $C_r^d = R_p Y_d$

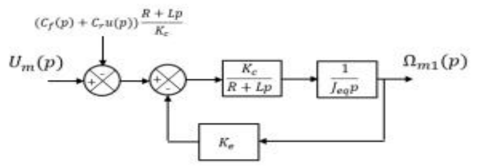
Barème (4 pt max) : 2 pt par expression (valeur absolue + signe)

Q12. Exprimer $H_p(p)$ en fonction des caractéristiques du moteur. Préciser l'unité de $P(p)$.



→

→



donc $P(p) = \frac{R_m + L_m p}{K_e}\left(C_f(p) + C_r u(p)\right)$, en V. donc $H(p) = \frac{R_m + L_m p}{K_e}$
P(p) est donc en volt.

Barème (3 pt max) : 1 pt pour démarche, 1 pt pour valeur finale juste, 1 pt pour unité P(p).

Q13. Justifier les signes du comparateur ayant pour entrées $h_d(p)$ et $h_g(p)$.

À partir de la figure 16, on obtient que :

$$sin(\alpha) = \frac{h_d - h_g}{L} \approx \alpha$$

Donc en passant dans le domaine de Laplace :

$$\alpha(p) = \left(h_d(p) - h_g(p)\right).\frac{1}{L}$$

Cela correspond bien aux signes du comparateur.

Barème (2 pt max) : 2 pt explications rigoureuses, (1 pt si explication de bon sens, « avec les mains »)

Q14. Exprimer $h_d(p)$ et $h_g(p)$ en fonction de $\varepsilon_c(p)$, $U_v(p)$ et $P_d(p)$ ou $P_g(p)$.

$$h_d(p) = \left(-K_{adapt}\varepsilon_c(p) - U_v(p) - P_d(p)\right).\frac{-H_m(p)R_p}{p} = \left(K_{adapt}\varepsilon_c(p) + U_v(p) + P_d(p)\right).\frac{H_m(p)R_p}{p}$$

De même :

$$h_g(p) = \left(-K_{adapt}\varepsilon_c(p) + U_v(p) - P_g(p)\right).\frac{H_m(p)R_p}{p}$$

Barème (2 pt max) : 1 pt par expression (TOR).

Q15. Montrer qu'il est alors possible de mettre le schéma-blocs initial sous la forme présentée par la figure 20. Pour cela, exprimer $H_{eq}(p)$ en fonction du contenu des blocs du schéma initial de la figure 19.

On peut donc exprimer :

$$\alpha(p) = \frac{h_d(p) - h_g(p)}{L}$$

$$\left(\varepsilon_c(p) + \underline{U_v(p) + P_d(p)}\right).\frac{H_m(p)K_{adapt}R_p}{Lp} - \left(-\varepsilon_c(p) + \underline{U_v(p) + P_d(p)}\right).\frac{H_m(p)K_{adapt}R_p}{Lp}$$

Ka   Ka

$= \frac{2H_m(p)K_{adapt}R_p}{Lp}\varepsilon_c(p)$ Donc $H_{eq}(p) = \frac{2H_m(p)K_{adapt}R_p}{Lp}$

Barème (3 pt max) : 1 pt pour expression $\alpha(p) = \frac{h_d(p)-h_g(p)}{L}$, 2 pt pour expression finale $H_{eq}(p)$ (TOR).

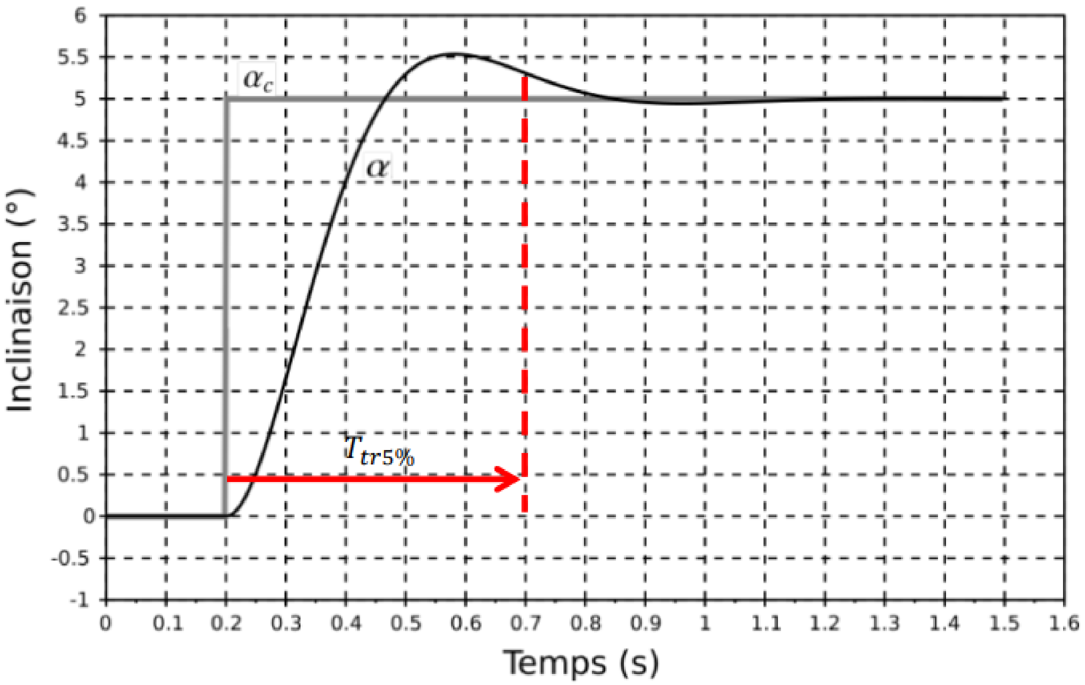
Q16. Donner la fonction de transfert en boucle ouverte (notée $H_{BO}(p)$) de ce système en fonction de $H_m(p)$, $C_{orr}(p)$, K_{adapt} et des paramètres géométriques. Préciser son ordre et sa classe si $C_{orr}(p) = 1$.

$$H_{BO}(p) = C_{orr}(p)H_{eq}(p) = C_{orr}(p)K_{adapt}\frac{2H_m(p)R_p}{Lp}$$

classe : 1, ordre : 3.

Barème (3 pt max) : 1 pt pour $H_{BO}(p) = C_{orr}(p)H_{eq}(p)$, 1 pt pour expression finale juste (TOR), 1 pt pour ordre et classe cohérents avec expression trouvée.

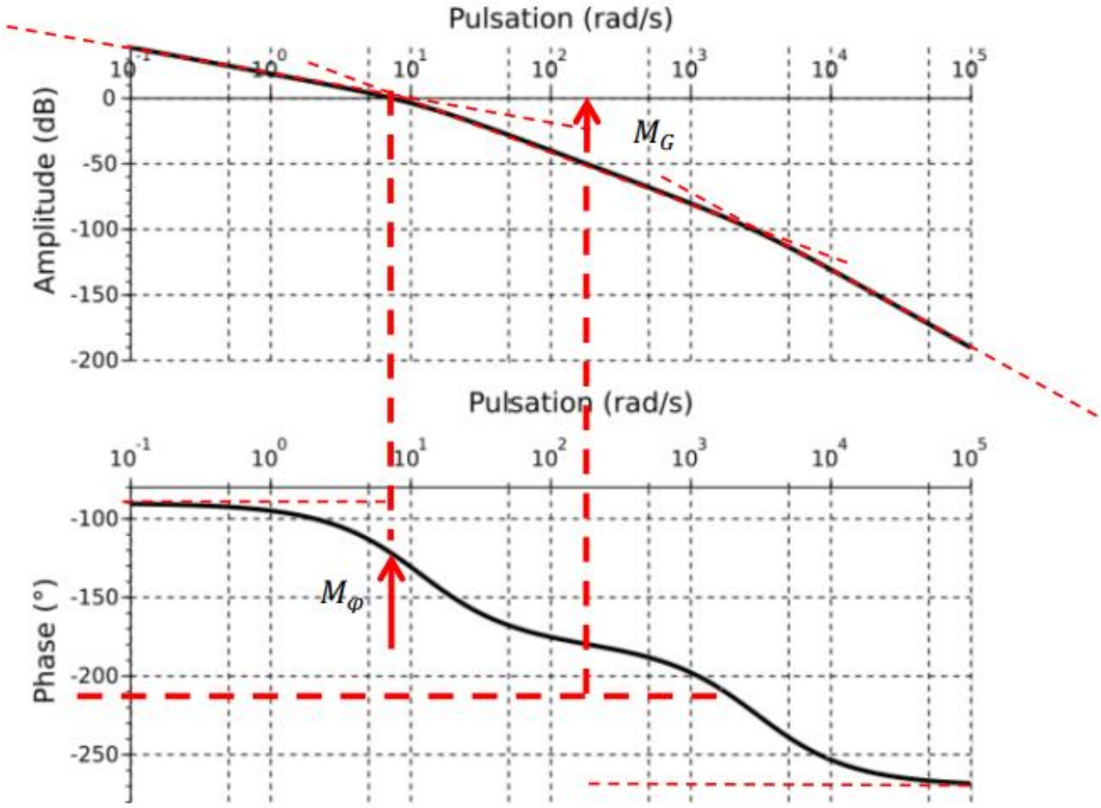
Q17. Répondre sur le **DR2** : vérifier si les exigences associées à l'asservissement en inclinaison du robot sont vérifiées. Mettre en place les tracés permettant la vérification des critères considérés.



$T_{tr5\%} \approx 0.7s > 0.1s$ (exig 1.3.1.2) PAS OK

Dépassement $D_{1\%} = \frac{5{,}6-5}{5} = 12\%$ juste supérieur à 10% (exig 1.3.1.4) PAS OK

Erreur statique nulle (exig 1.3.1.5) OK



$M_\varphi \approx 60° < 75°$ (exig 1.3.1.1) PAS OK

$M_G \approx 50dB > 10dB$ (exig 1.3.1.1) OK

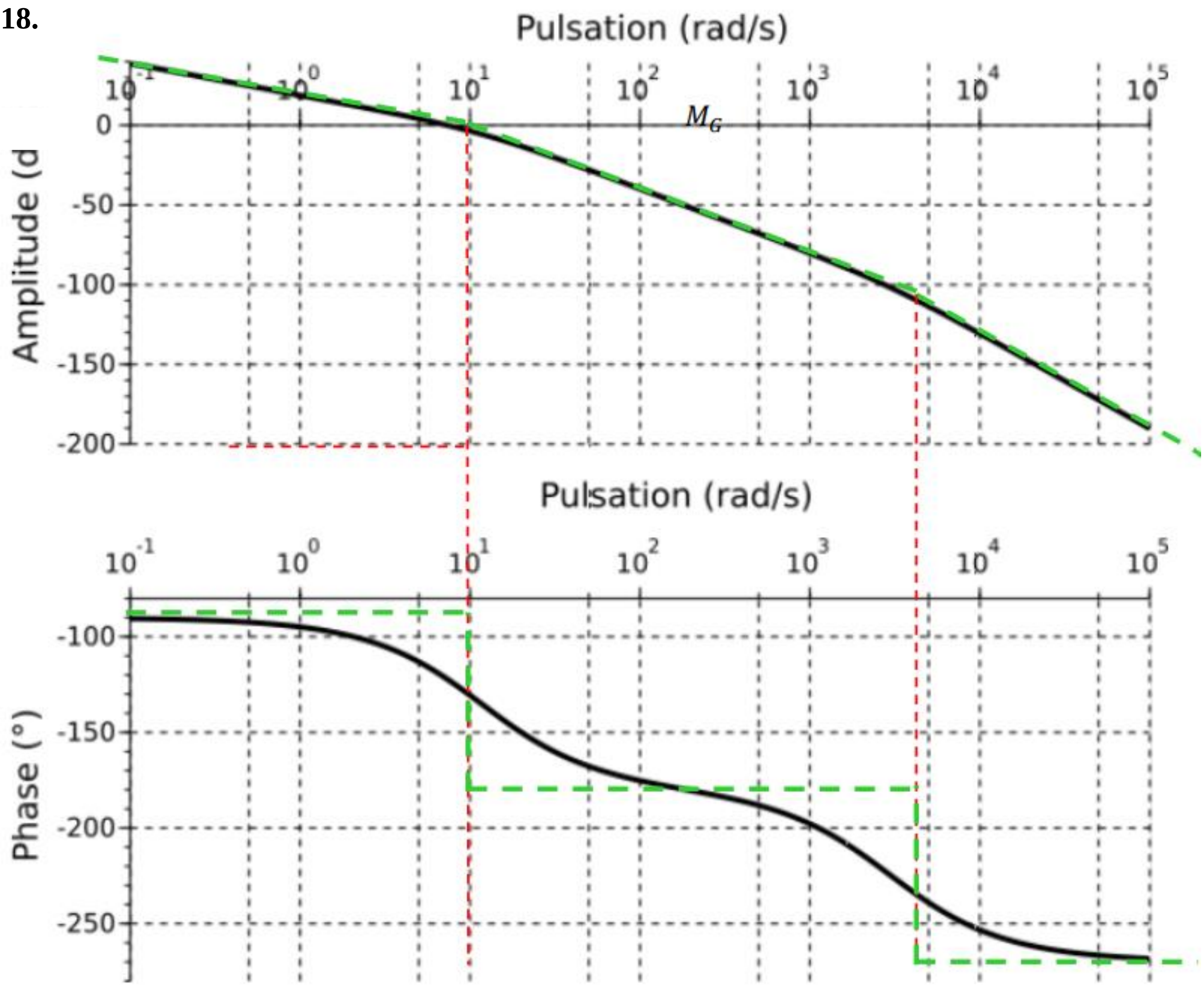
Bande passante de ≈ 6 rad/s < 20 rad/s (exig 1.3.1.3) : PAS OK

Barème temporel (4 pt) : 1 pt par niveau de critère d'exigence (t5%, D1%, erreur statique), 1pt global si conclusion juste pour chaque critère.

Barème fréquentiel (4 pt) : 1 pt par niveau de critère d'exigence (Mphase, Mgain, bande passante) avec valeur précise), 1pt global si conclusion juste pour chaque critère.

Barème total (8 pt max).

Q18.



Barème (3 pt) : 1 pt pour gain, 1pt pour phase, 1 point pour cohérence (discontinuité de la phase au niveau des croisements des pentes de gain)

Q19. En déduire les valeurs numériques de τ_1 et τ_2.

D'après le diagramme de gain, les pulsations de cassure sont $10 rad.s^{-1}$ et $3000 rad.s^{-1}$

Donc $\tau_1 = \frac{1}{3000} = 3{,}33.10^{-4} = 0.33ms$ et $\tau_2 = \frac{1}{10} = 0.1s$

Barème (2 pt) : 1 pt par valeur numérique juste. On accepte environ 10% d'erreur.

Q20. Justifier le choix d'un tel correcteur.

Deux raisons principales :

- amélioration de la rapidité,
- l'intégration placée avant la perturbation permet de rejeter cette dernière

Barème (2 pt) : 1 pt par justification

Q21. Donner la valeur de T_i permettant de compenser le pôle dominant de $H_{eq}(p)$ et en déduire la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ sous forme canonique.

Compenser le pôle dominant revient à supprimer le terme de plus grande constante de temps, donc à choisir $T_i = \tau_2$, et donc la BO devient :

$$H_{BO}(p) = K_p \frac{1+T_i p}{T_i p} . \frac{K_{eq}}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} = K_p \frac{K_{eq}}{T_i p^2 (1+\tau_1 p)}$$

Barème (2 pt) : 1 pt pour valeur de T_i, 1 pt pour expression finale juste

Q22. Justifier le choix d'un tel correcteur.

Le système obtenu est proche de l'instabilité, car la marge de phase est très faible.

Barème (1 pt) : 1 pt pour justification vis-à-vis de la stabilité.

Q23. Déterminer la valeur de a permettant d'apporter la phase nécessaire au niveau de la pulsation ω_{0dB} visée ($20 rad.s^{-1}$) permettant de respecter la marge de phase.

On constate que pour le ω_{0dB} visé ($20 rad.s^{-1}$), la phase est d'environ -178°. Il faut donc rajouter une phase de 73° pour atteindre la marge de phase souhaitée soit :

$sin(73°) = \frac{a-1}{a+1}$ donc $a = \frac{1+sin(73°)}{1-sin(73°)} = 44{,}77$

Barème (2 pt) : 1 pt pour démarche, 1 pt pour valeur numérique obtenue (on accepte environ 10% d'erreur)

Q24. En déduire la valeur de T_{av} qu'il faut choisir.

Il faut placer cette augmentation de phase en $\omega_{max} = 20 rad.s^{-1}$ donc :

$\omega_{max} = \frac{1}{T_{av}\sqrt{a}}$ soit $T_{av} = \frac{1}{\omega_{max}\sqrt{a}} = \frac{1}{20\sqrt{44.77}} = 0.0075s$

Barème (2 pt) : 1 pt pour démarche, 1 pt pour valeur numérique obtenue (on accepte environ 10% d'erreur)

Q25. À l'aide de la figure 22, donner une valeur approchée de K_p permettant de respecter les exigences observables. Préciser ces exigences.

K_p=3.5 qui permet à la fois de respecter le temps de réponse (<0.1s), et le dépassement max n'est pas dépassé (<10%). Dans tous les cas, l'erreur statique semble tendre vers 0.

Barème(4 pt) : 1 pt pour valeur choisie, 1 pt par exigence justifiée avec valeurs numériques.