

Durée de l'épreuve : 2h

Aucun document autorisé - L'usage de la calculatrice est autorisée

Skypod, système automatisé de préparation de commande

Présentation

Le système Skypod est une solution d'aide à la préparation de commande dans des zones de stockage de grande capacité. Il est conçu en France (région Hauts-de-France) par la société Exotec. Sa flexibilité et son adaptabilité en font un leader de son domaine, ce qui a permis à Exotec de devenir en 2022 la première licorne industrielle française (« start-up » valorisée à plus d'un milliard de dollars US). De grands noms internationaux du commerce en ligne ou physique comptent parmi ses principaux clients.

L'une de ses spécificités est son robot manipulateur de bac qui peut évoluer dans les trois dimensions. Il peut ainsi se déplacer sur le sol pour circuler dans les allées et rejoindre les postes de livraison (figure 1). Mais il peut également évoluer verticalement pour atteindre les bacs dans lesquels les produits sont stockés (figure 2).



Figure 1 - Robot évoluant horizontalement



Figure 2 - Robot évoluant verticalement

Quatre composants permettent de mettre en œuvre cette solution (figure 4) :

- la flotte de robots qui transporte les bacs entre opérateurs et zones de stockage,
- les racks, permettant de stocker les bacs, et dont le positionnement et la structure permettent les déplacements horizontaux et verticaux des robots,
- les stations qui permettent aux opérateurs de déposer et récupérer les produits dans les bacs apportés par les robots,
- le serveur permettant de gérer la flotte de robots en lien avec les consignes données par les stations.

Ce sujet s'intéresse particulièrement aux déplacements du robot. Un extrait du cahier des charges est donné sous forme de diagramme d'exigence par la figure 25 de l'annexe 2.

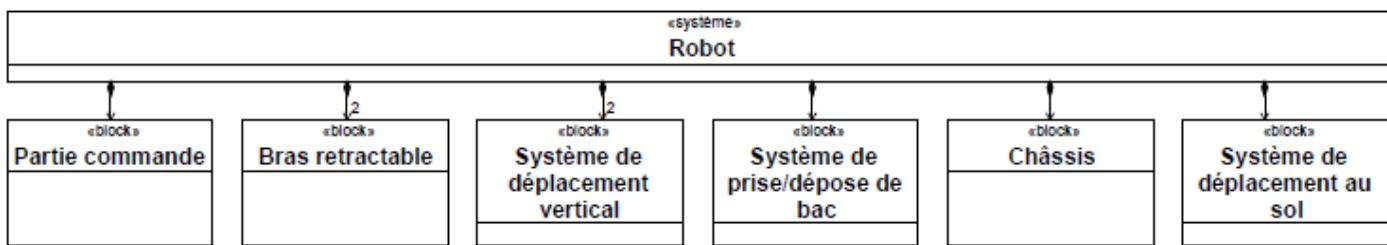


Figure 3 - Diagramme de définition de blocs d'un robot Skypod

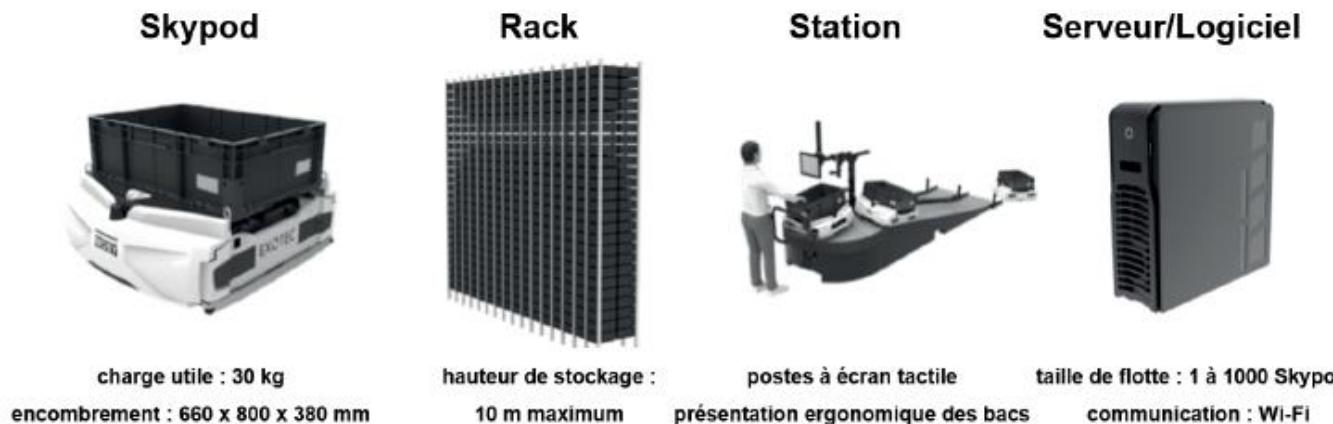


Figure 4 - Principaux composants de la solution Skypod

Analyse structurelle du robot

La structure du robot est présentée figure 3. Ce robot est constitué d'un châssis et de différents sous-systèmes.

- La partie commande contrôle le robot, communique avec le serveur et fournit des consignes aux autres sous-systèmes.
- Le système de déplacement au sol permet au robot de se déplacer au sein de l'entrepôt. Il est composé de deux roues motrices (droite et gauche) commandées par deux moteurs et de deux autres roues libres permettant de garantir une bonne stabilité au sol (figure 1).
- Deux systèmes de déplacement vertical (droit et gauche) permettent au robot de s'élever entre les racks afin d'atteindre une hauteur donnée. Ils entraînent quatre pignons situés dans chaque coin du robot qui eux-mêmes engrènent sur des chaînes tendues verticalement le long des racks (figure 2 et figure 13). La liaison pignon/chaîne se comporte comme une liaison pignon/crémaillère.
- Deux systèmes de bras rétractables facilitent le déplacement au sol, chaque système de déplacement vertical est positionné sur un bras rétractable. Ils sont rentrés au sein du châssis lors des déplacements au sol, puis sortis lors des déplacements verticaux afin que les pignons entrent en contact avec les chaînes tendues. Un robot ne peut donc évoluer horizontalement qu'au sol.
- Un système de prise et dépose de bac translate le bac de sa position de stockage dans le rack à sa position de transport sur le robot (ou inversement). Il est constitué d'une fourche télescopique qui se déploie (figure 5 et figure 6) afin de se positionner sous le bac, puis rentre en déplaçant le bac avec elle.



Figure 5 - Prise d'un bac (fourche sous le bac dans un rack)

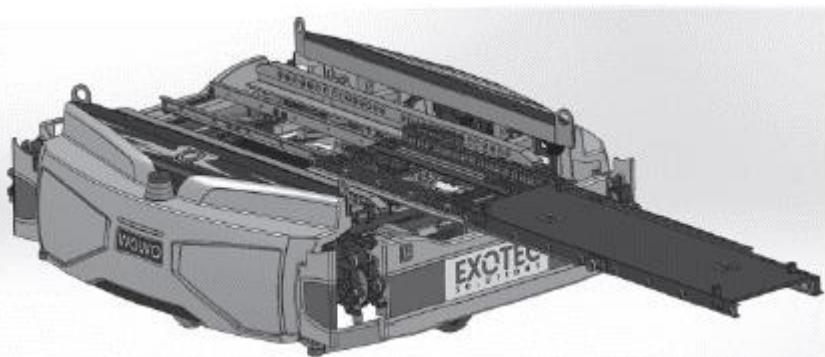


Figure 6 - Fourche déployée

Partie I – Trajectoire du robot en phase de déplacement au sol

Objectif : étudier le comportement cinématique du robot en phase de déplacement au sol.

Pour ses déplacements au sol, le robot possède deux roues motrices 2 et 3 insérées dans deux chaînes de puissance différentes (et donc entraînées par deux moteurs différents). Pour assurer la stabilité au sol, deux autres roues laissées libres de leurs mouvements (dites « folles ») sont associées à un mécanisme permettant aux quatre roues d'être en contact avec le sol en permanence.

On s'intéresse à une trajectoire composée d'un segment droit, d'une courbe permettant au robot de tourner d'un quart de tour vers la gauche, puis d'un dernier segment droit (figure 7).

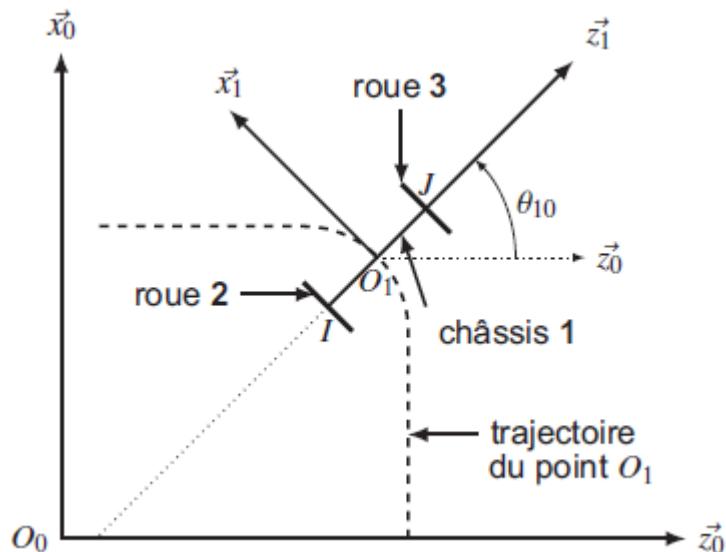


Figure 7 - Paramétrage du robot au sol

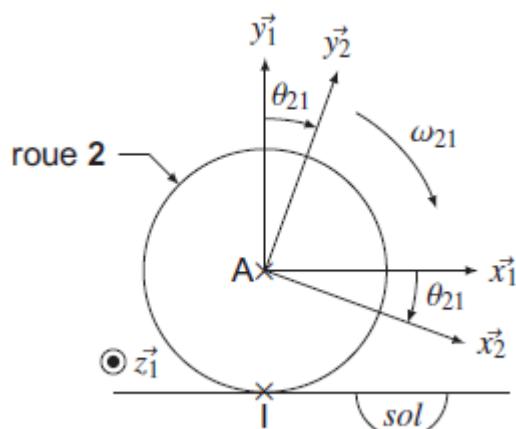


Figure 8 - Paramétrage de la roue 2 en contact avec le sol en 1

Le robot est vu comme un ensemble de trois solides : le châssis 1, la roue gauche 2 en contact avec le sol 0 au point 1 et la roue droite 3 en contact avec le sol 0 au point J.

Les roues 2 et 3 sont en liaison pivot d'axe respectivement (A, \vec{z}_1) et (B, \vec{z}_1) avec le châssis 1 et on considérera qu'il y a roulement sans glissement de la roue 2 (respectivement roue 3) par rapport au sol 0 en 1 (respectivement en J). Pour des raisons de simplification, les roues « folles » ne sont pas étudiées ou représentées mais imposent que le châssis 1 ne peut être en rotation que selon \vec{y}_1 .

On définit :

- $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le référentiel supposé galiléen lié au sol 0. On notera que \vec{y}_0 est donc la verticale ascendante,
- $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le référentiel lié au châssis 1, avec $\theta_{10}(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$, $\omega_{10}(t) = \frac{d\theta_{10}(t)}{dt}$ et la vitesse du robot $\vec{V}(O_1 \in 1/0) = V(t)\vec{x}_1$;
- $R_2(A_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le référentiel lié à la roue gauche 2, avec A le centre de la roue, R = 20 mm son rayon, $\theta_{21}(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ et $\omega_{21}(t) = \frac{d\theta_{21}(t)}{dt}$ (figure 8),
- $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ le référentiel lié à la roue droite 3, avec B le centre de la roue, R = 20 mm son rayon, $\theta_{31}(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$ et $\omega_{31}(t) = \frac{d\theta_{31}(t)}{dt}$ (paramétrage analogue à la roue 2) :
- L la largeur du robot : $\overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{O_1B} = \frac{L}{2}\vec{z}_1$

Question 1 À l'aide de la condition de roulement sans glissement en I, donner la relation entre $V(t)$, $\omega_{21}(t)$ et $\omega_{10}(t)$.

Question 2 Par un raisonnement analogue, donner directement la relation entre $V(t)$, $\omega_{31}(t)$ et $\omega_{10}(t)$.

Question 3 En déduire $\omega_{10}(t)$ en fonction de $\omega_{21}(t)$ et de $\omega_{31}(t)$.

On s'intéresse dans un premier temps à une trajectoire rectiligne. On note $\omega_{moy}(t)$ la vitesse de rotation des roues pour cette trajectoire pour une vitesse $V(t) = 2m.s^{-1}$.

Question 4 Démontrer que pour une trajectoire rectiligne, $\omega_{21}(t) = \omega_{31}(t)$. En déduire $\omega_{moy}(t)$ et donner sa valeur.

On s'intéresse dans un deuxième temps à la réalisation du virage de 90° vers la gauche (figure 7). Pour cela, on fait varier la vitesse ω_{21} par une loi en trapèze et la vitesse ω_{31} par une seconde loi en trapèze telle que $\dot{\omega}_{21}(t) = -\dot{\omega}_{31}(t)$, avec $\dot{\omega}_{21}(t)$ et $\dot{\omega}_{31}(t)$ les accélérations angulaires des roues 2 et 3 par rapport au châssis 1.

Question 5 Donner dans ces conditions la valeur de l'accélération angulaire $\ddot{\omega}_{10}(t)$ en fonction de $\dot{\omega}_{21}(t)$.

Ces lois de commande de vitesse des roues aboutissent à l'évolution de $\omega_{10}(t)$ au cours d'un virage de 90° donnée figure 9. La norme de l'accélération angulaire pendant les phases 1 et 3 est constante et notée γ_{10} .

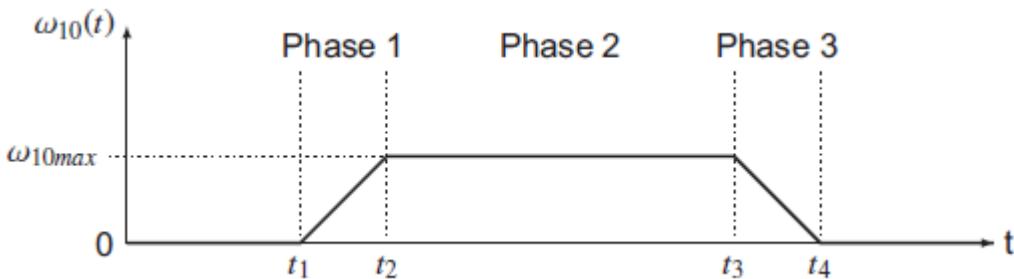


Figure 9 - Évolution de ω_{10} lors d'un virage de 90°

Question 6 En faisant l'hypothèse que $t_1 = 0$, donner les expressions littérales de t_2 , de t_3 et de t_4 en fonction de ω_{10max} et de γ_{10} .

On propose plusieurs simulations de trajectoire pour différentes valeurs de ω_{10max} dont le point de départ est de coordonnées (0,0) (figure 10). À des fins de comparaison, la figure 11 présente ces trajectoires en version normalisée (point de départ et d'arrivée de coordonnées (0,0) et (-1,1)).

Question 7 À l'aide des figure 10 et figure 11, commenter l'influence de ω_{10max} sur la trajectoire du robot lors d'un virage.

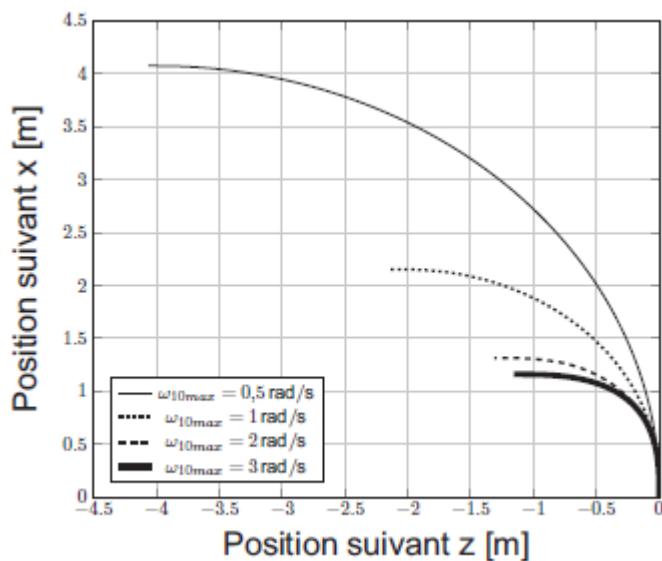


Figure 10 - Trajectoires selon plusieurs valeurs de $\omega_{10\max}$

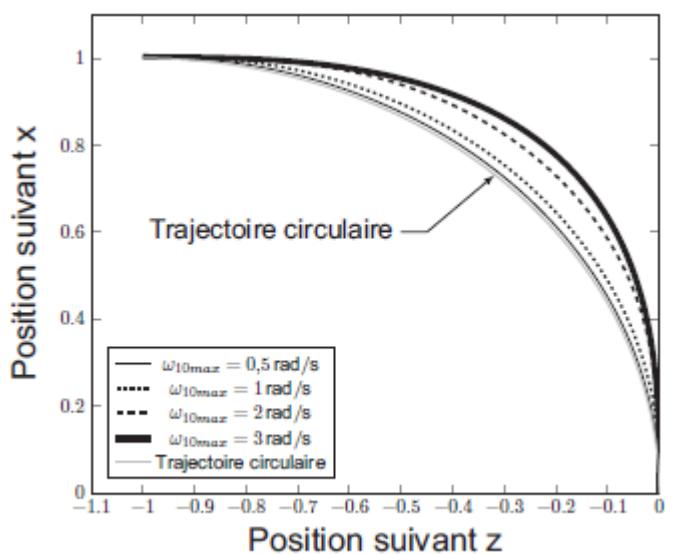


Figure 11 - Trajectoires normalisées selon plusieurs valeurs de $\omega_{10\max}$

Partie II – Asservissement de l'assiette du robot

Objectif : modéliser et mettre au point l'asservissement de l'inclinaison du robot.

Cette partie s'intéresse au contrôle de l'inclinaison du robot lors de la phase d'ascension, repérée par son angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale, noté $\alpha(t)$. Cette phase est schématisée figure 16, dans le cas horizontal ($\alpha = 0$) et dans le cas incliné ($\alpha \neq 0$). Les pignons sont ramenés dans le plan médian. Pour rappel, un sous-système non étudié ici permet de garantir le contact pignon/chaîne.

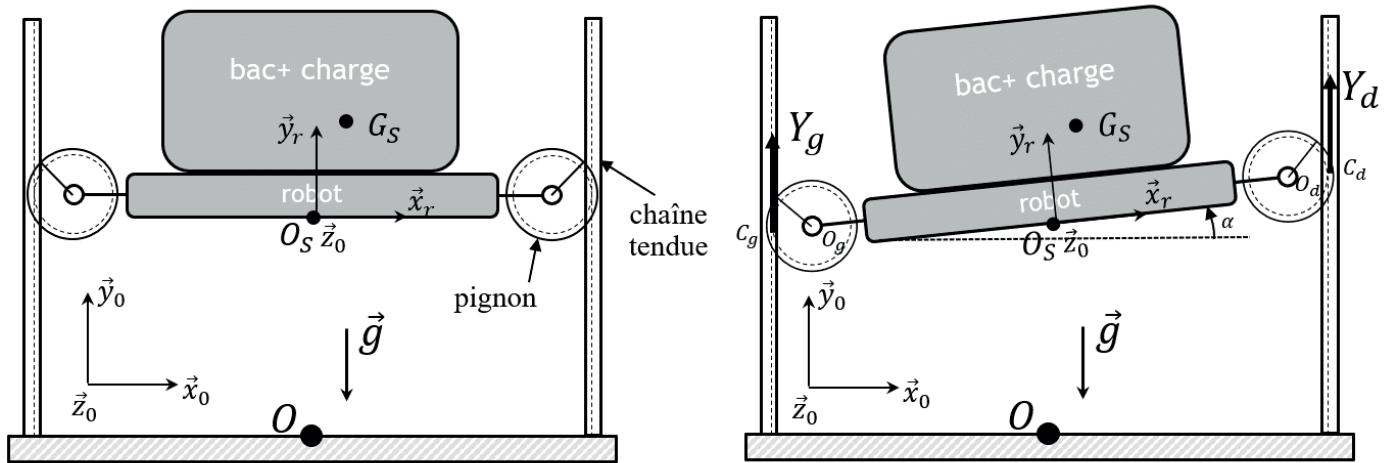


Figure 16 - Schématisation du robot en phase d'ascension, dans la configuration horizontale (à gauche) et inclinée (à droite).

Question 8 En ne considérant que 2 pignons, en liaison pivot motorisée avec le robot et en liaison ponctuelle avec les chaînes immobiles, expliquer pourquoi il y a 6 mobilités (justifier les 2 utiles et les 4 internes) qui conduisent à un système isostatique {robot+2pignons+chaines}

On présente figure 17 la structure générale de l'asservissement associée à la phase étudiée. Cette inclinaison est modifiée grâce au différentiel de vitesse et de position des pignons gauche et droit. Un inclinomètre mesurant l'inclinaison du robot permet au calculateur de gérer l'asservissement.

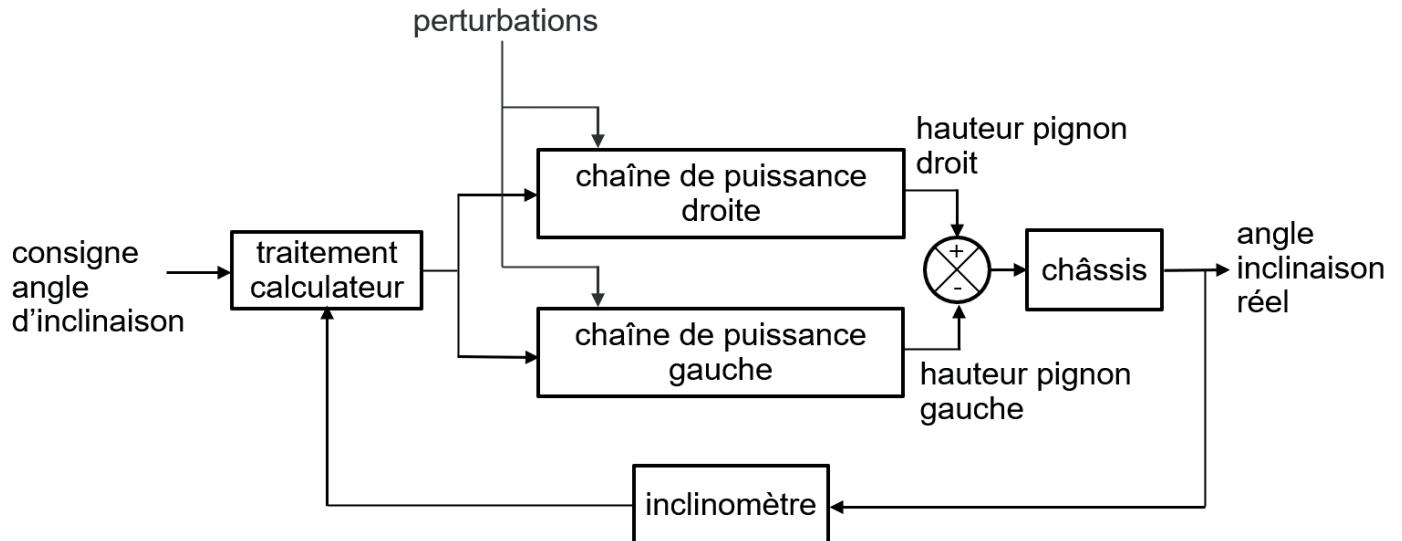


Figure 17 - Structure générale de l'asservissement en inclinaison du robot en phase d'ascension.

II.1 - Modélisation de la motorisation

Un moteur d'ascension peut se modéliser comme une machine à courant continu dont on rappelle les équations :

$$u_m(t) = e(t) + R_m i_m(t) + L_m \frac{di_m(t)}{dt} ; e(t) = K_e \cdot \omega_{m1}(t) ; C_m(t) = K_c \cdot i_m(t) ; J_{eq} \frac{d\omega_{m1}(t)}{dt} = C_m(t) + C_r - C_f(t)$$

et dont les notations sont détaillées tableau 5. Le schéma-blocs correspondant est ébauché dans le DR4. Les notations des variables dans le domaine de Laplace sont répertoriées dans le tableau 6.

Variables	Constantes
$u_m(t)$: tension moteur (V)	$R_m = 3 \Omega$: résistance de l'induit
$i_m(t)$: intensité moteur (A)	$L_m = 1 mH$: inductance de l'induit
$e(t)$: force contre-électromotrice (V)	$K_c = 2 N \cdot m \cdot A^{-1}$: constante de couple
$C_m(t)$: couple électromagnétique (N·m)	$K_e = 2 V \cdot s \cdot rad^{-1}$: constante électrique
C_r : couple résistant dû à la pesanteur ramené sur l'arbre moteur (N·m)	$J_{eq} = 1,14 \cdot 10^{-1} kg \cdot m^2$: inertie équivalente des pièces mobiles entraînées par le moteur, ramenée sur l'arbre moteur
$C_f(t)$: couple résistant dû à l'ensemble des frottements secs ramené sur l'arbre moteur (N·m)	

Tableau 5 - Variables et valeurs numériques utiles

Notation temporelle	Notation Laplace	Notation temporelle	Notation Laplace
$e(t)$	$E(p)$	$u_m(t)$	$U_m(p)$
$i_m(t)$	$I_m(p)$	$\omega_{m1}(t)$	$\Omega_{m1}(p)$
$C_m(t)$	$C_m(p)$	$C_f(t)$	$C_f(p)$
échelon unitaire	$\frac{1}{p}$	C_r	$\frac{C_r}{p}$

Tableau 6 - Notations dans le domaine de Laplace

Question 9 Compléter les blocs du **DR1** au niveau des « ... », avec les fonctions de transfert et variables manquantes dans le schéma-blocs du moteur.

Afin de prédire au mieux le comportement du robot, il est nécessaire de modéliser avec plus de précision le couple résistant C_r que subit chaque moteur. On ne s'intéresse d'abord qu'au moteur droit. La démarche est identique pour le moteur gauche.

Hypothèses et paramétrage :

- On note $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le référentiel supposé galiléen lié au sol.
- On note S l'ensemble des pièces en mouvement :
 $S = \{\text{Châssis 1+Moteurs+Systèmes Poule/Courroie+Arbres transmission+Pignons+Bac rempli}\}$, de masse m_S .
- L'attraction de la pesanteur est notée $-g\vec{y}_0$.
- On note α l'angle d'inclinaison du robot et $R_S(O_S, \vec{x}_r, \vec{y}_r, \vec{z}_0)$, le référentiel lié au robot, tel que le référentiel lié au robot, tel que : $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_r) = (\vec{y}_0, \vec{y}_r)$.
- On supposera que l'angle α reste très petit.
- On note G_S le centre d'inertie de l'ensemble S , tel que $\overrightarrow{OG_S} = \overrightarrow{OO_S} + \overrightarrow{O_SG_S}$ avec $\overrightarrow{OO_S} = h\vec{y}_0$ et $\overrightarrow{O_SG_S} = x_{G_S}\vec{x}_r + y_{G_S}\vec{y}_r$. La position du centre de gravité n'est pas le centre géométrique du robot car la masse transportée est potentiellement excentrée.
- On note O_g et O_d les centres des pignons gauche et droit ramenés dans le plan d'étude. On note C_g et C_d les points d'engrènement entre les pignons et les chaînes, de sorte que :

$$\overrightarrow{OG_S} = \frac{L}{2}\vec{x}_r - a\vec{y}_r, \overrightarrow{O_SO_d} = \frac{L}{2}\vec{x}_r + a\vec{y}_r, \overrightarrow{O_gO_d} = L\vec{x}_r, \overrightarrow{C_gO_g} = \overrightarrow{O_dC_d} = R_p\vec{x}_r.$$

- Les actions mécaniques aux points C_g et C_d seront modélisées par les glisseurs simplifiés suivants :

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{chaîne} \rightarrow \text{pignon gauche}}^{C_g} \right\} = \begin{cases} Y_g\vec{y}_0 \\ 0 \end{cases} \Big|_{C_g} \text{ et } \left\{ \mathcal{T}_{\text{chaîne} \rightarrow \text{pignon gauche}}^{C_d} \right\} = \begin{cases} Y_d\vec{y}_0 \\ 0 \end{cases} \Big|_{C_d}$$

- Le couple résistant C_r dû à la pesanteur sera distingué pour chaque moteur. On note C_r^g le couple résistant appliqué à l'arbre moteur gauche et C_r^d pour le moteur droit.

Il est rappelé que compte tenu du fait que les rayons primitifs des poulies sont identiques et que la transmission est considérée comme parfaite, tout se passe comme si chaque moteur était directement en prise sur l'arbre du pignon correspondant.

Question 10 En se plaçant à l'équilibre statique et en précisant la démarche, déterminer les expressions de Y_g et Y_d en fonction de m_S , g , L , R_p et de x_{G_S} . On rappelle que l'angle α est supposé très petit.

Question 11 En déduire l'expression des couples C_r^g et C_r^d .

La fonction de transfert du moteur sans perturbation s'écrit :

$$H_m(p) = \frac{\Omega_{m1}(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R_{J_{eq}}}{K_e K_c} p + \frac{L_{J_{eq}}}{K_e K_c} p^2}$$

Il est alors possible de modifier le schéma-blocs initial du moteur (DR4), avec perturbation, pour le mettre sous la forme proposée figure 18, dans laquelle $P(p)$ dépend du signal dû à la perturbation $C_f(p) + \frac{c_r}{p}$.

Question 12 Exprimer $H_p(p)$ en fonction des caractéristiques du moteur. Préciser l'unité de $P(p)$.

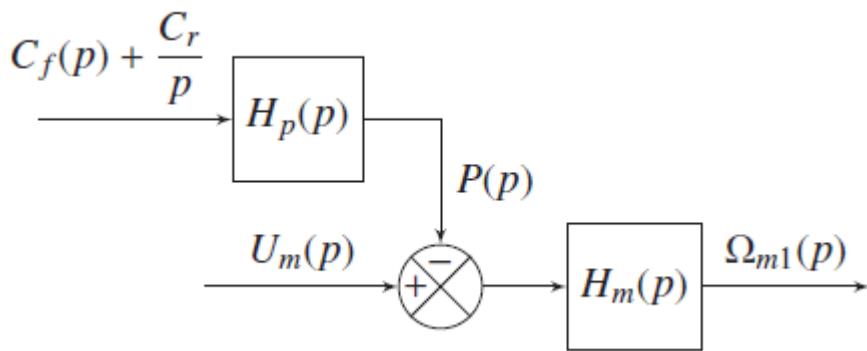


Figure 18 - Schéma-blocs modifié du moteur

Dans la suite, le signal $P(p)$ sera distingué en un signal $P_d(p)$ pour le moteur droit et $P_g(p)$ pour le moteur gauche.

II.2 - Mise en place et correction de l'asservissement

Les activités précédentes permettent de mettre en place la modélisation complète de l'asservissement en inclinaison du robot dans la phase d'ascension (figure 19) en considérant que l'angle d'inclinaison reste petit. Les différentes variables dans le domaine de Laplace introduites sont détaillées dans le tableau 7.

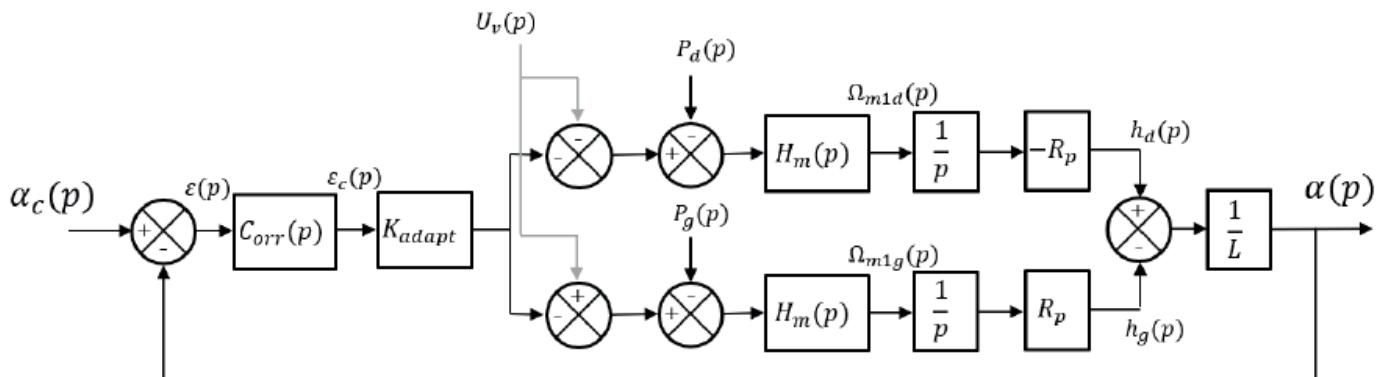


Figure 19 - Schéma-blocs de l'asservissement en inclinaison, en phase de mouvement vertical

Variabes

$\alpha_c(p)$: consigne angulaire d'inclinaison

$\varepsilon(p)$: écart

$\varepsilon_c(p)$: écart corrigé

$P_g(p)$: perturbation moteur gauche

$h_g(p)$: altitude point O_g

$U_v(p)$: tension de consigne correspondant à la vitesse d'ascension souhaitée

$\alpha(p)$: angle d'inclinaison du robot

$\Omega_{m1d}(p)$: vitesse de rotation moteur droit

$\Omega_{m1g}(p)$: vitesse de rotation moteur gauche

$P_d(p)$: perturbation moteur droit

$h_d(p)$: altitude point O_d

K_{adapt} : gain adaptateur

Fonctions de transfert

$H_m(p)$: fonction de transfert du moteur

R_p : rayon primitif du pignon

$C_{corr}(p)$: correcteur

$L = \|\overrightarrow{O_g O_d}\|$

Tableau 7 - Définition des variables et fonctions de transfert (dans le domaine de Laplace)

Question 13 Justifier les signes du comparateur ayant pour entrées $h_d(p)$ et $h_g(p)$.

Question 14 Exprimer $h_d(p)$ et $h_g(p)$ en fonction des variables $\varepsilon_c(p)$, $U_c(p)$ et $P_d(p)$ ou $P_g(p)$.

On suppose maintenant que la charge contenue dans le bac est centrée sur le robot, c'est-à-dire : $P_d(p) = -P_g(p)$.

Question 15 Montrer qu'il est alors possible de mettre le schéma-blocs initial sous la forme présentée par la figure 20. Pour cela, exprimer $H_{eq}(p)$ en fonction du contenu des blocs du schéma initial de la figure 19.

Question 16 Donner la fonction de transfert en boucle ouverte (notée $H_{BO}(p)$) de ce système en fonction de $H_m(p)$, $C_{orr}(p)$, K_{adapt} et des paramètres géométriques. Préciser son ordre et sa classe si $C_{orr}(p) = 1$.

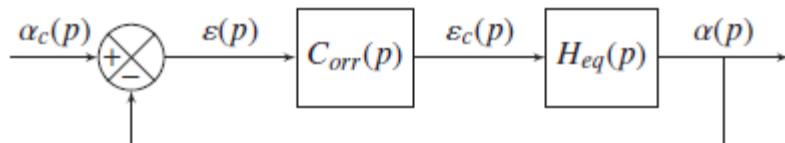


Figure 20 - Schéma-blocs simplifié de l'asservissement en inclinaison

On donne sur le DR2 la réponse fréquentielle (en boucle ouverte) et la réponse indicielle (en boucle fermée) du système non corrigé (c'est-à-dire pour $C_{orr}(p) = 1$). Attention les courbes sont sur le document réponse.

Question 17 Répondre sur le **DR2** : vérifier si les exigences associées à l'asservissement en inclinaison du robot sont vérifiées. Mettre en place les tracées permettant la vérification des critères considérés.

Quels que soient les résultats précédents, la fonction de transfert $H_{eq}(p)$ sera désormais prise de la forme :

$$H_{eq}(p) = \frac{K_{eq}}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \text{ avec } \tau_2 > \tau_1$$

Question 18 Sur le **DR2**, tracer les diagrammes de Bode asymptotiques correspondant aux tracées proposés.

Question 19 En déduire les valeurs numériques de τ_1 et de τ_2 .

Afin d'améliorer les performances de l'asservissement, on se propose d'introduire un correcteur de type proportionnel intégral : $C_{oor}(p) = K_p \frac{1+T_i p}{T_i P}$.

Question 20 **POUR les 5/2 Justifier** le choix d'un tel correcteur.

Question 21 Donner la valeur de T_i permettant de compenser le pôle dominant de $H_{eq}(p)$ et en déduire la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ sous forme canonique.

Les diagrammes de Bode obtenus avec la valeur de T_i déterminée Q29 sont tracés figure 21, en prenant $K_p = 1$.

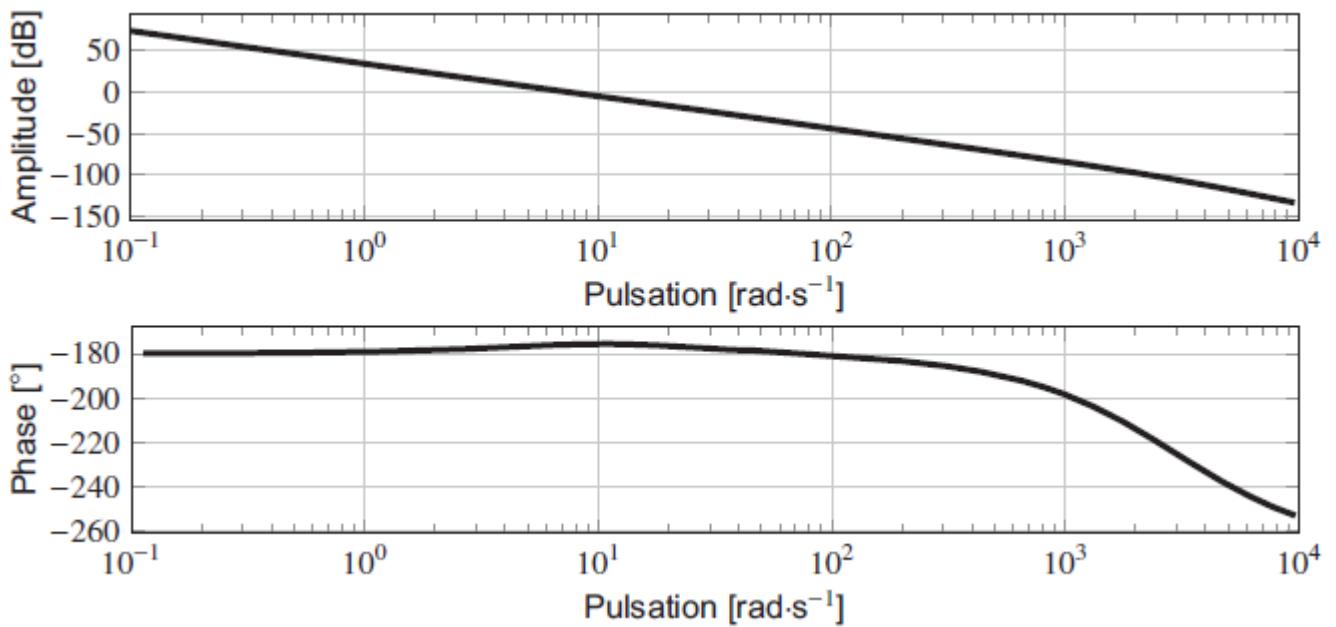


Figure 21 - Diagrammes de Bode avec correcteur PI ($K_p = 1$ et T_i choisi Q29)

On décide maintenant d'associer au correcteur précédent un correcteur à avance de phase (voir annexe 1) de paramètres a et T_{av} , de sorte que :

$$C_{oor}(p) = K_p \frac{1+T_ip}{T_ip} \cdot \frac{1+aT_{av}p}{1+T_{av}p} \text{ avec } a > 1$$

Question 22 POUR les 5/2 Justifier le choix d'un tel correcteur.

Question 23 Déterminer la valeur de a permettant d'apporter la phase nécessaire au niveau de la pulsation ω_{0dB} visée (20 rad. s^{-1}) permettant de satisfaire la marge de phase.

Question 24 En déduire la valeur de T_{av} qu'il faut choisir.

Le dernier réglage à effectuer est celui de K_p . Pour cela, on exploite une simulation numérique paramétrique, qui donne les résultats figure 22.

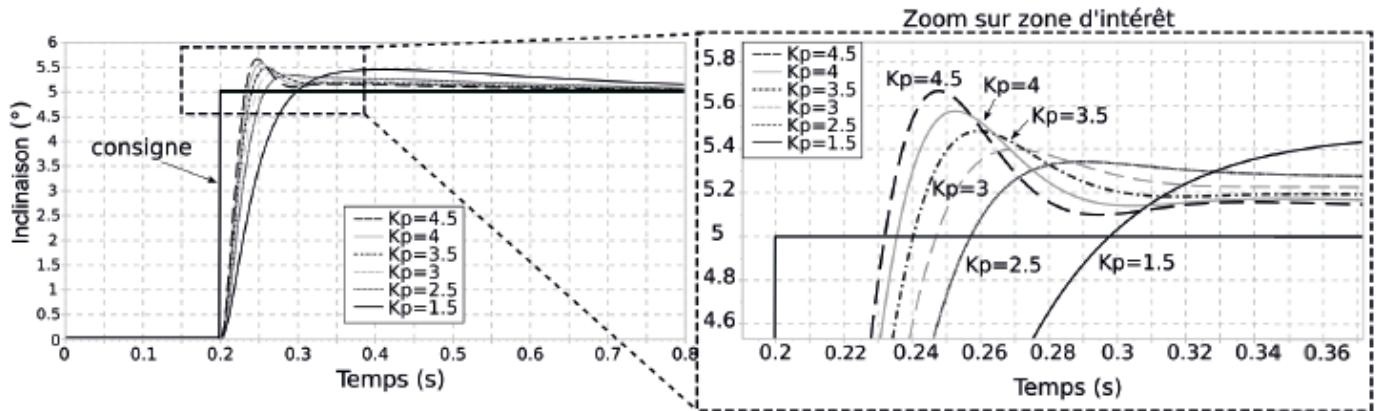


Figure 22 - Réponse indicielle pour différentes valeurs de K_p

Question 25 À l'aide de la figure 22, donner une valeur approchée de K_p permettant l'asservissement en position du robot.

Les travaux précédents permettent de régler au mieux le correcteur permettant l'asservissement en inclinaison du robot.

ANNEXE 1

Caractéristiques du correcteur à avance de phase

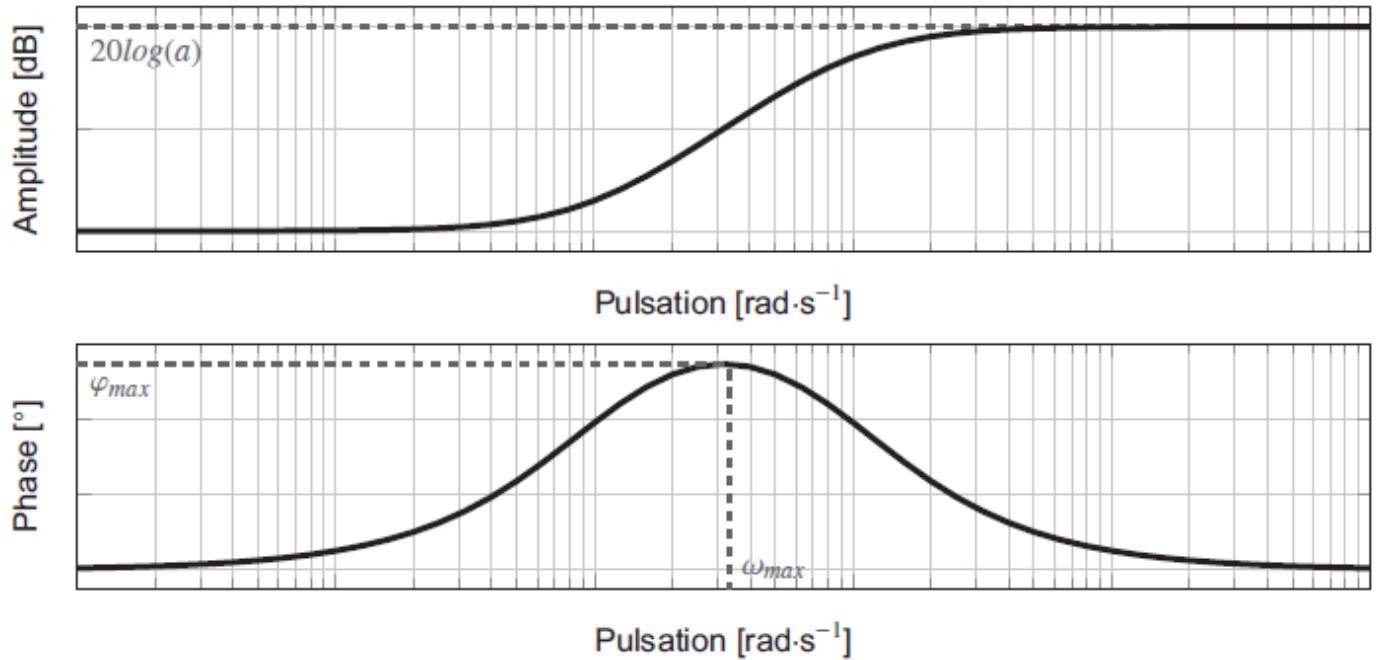


Figure 24 - Diagrammes de Bode du correcteur à avance de phase (sans gain) $\frac{1+aT_{av}p}{1+T_{av}p}$

$$\text{Avec : } a > 1, \sin(\varphi_{max}) = \frac{a-1}{a+1} \text{ et } \omega_{max} = \frac{1}{T_{av}\sqrt{a}}$$

ANNEXE2 : Extrait du cahier des charges du robot

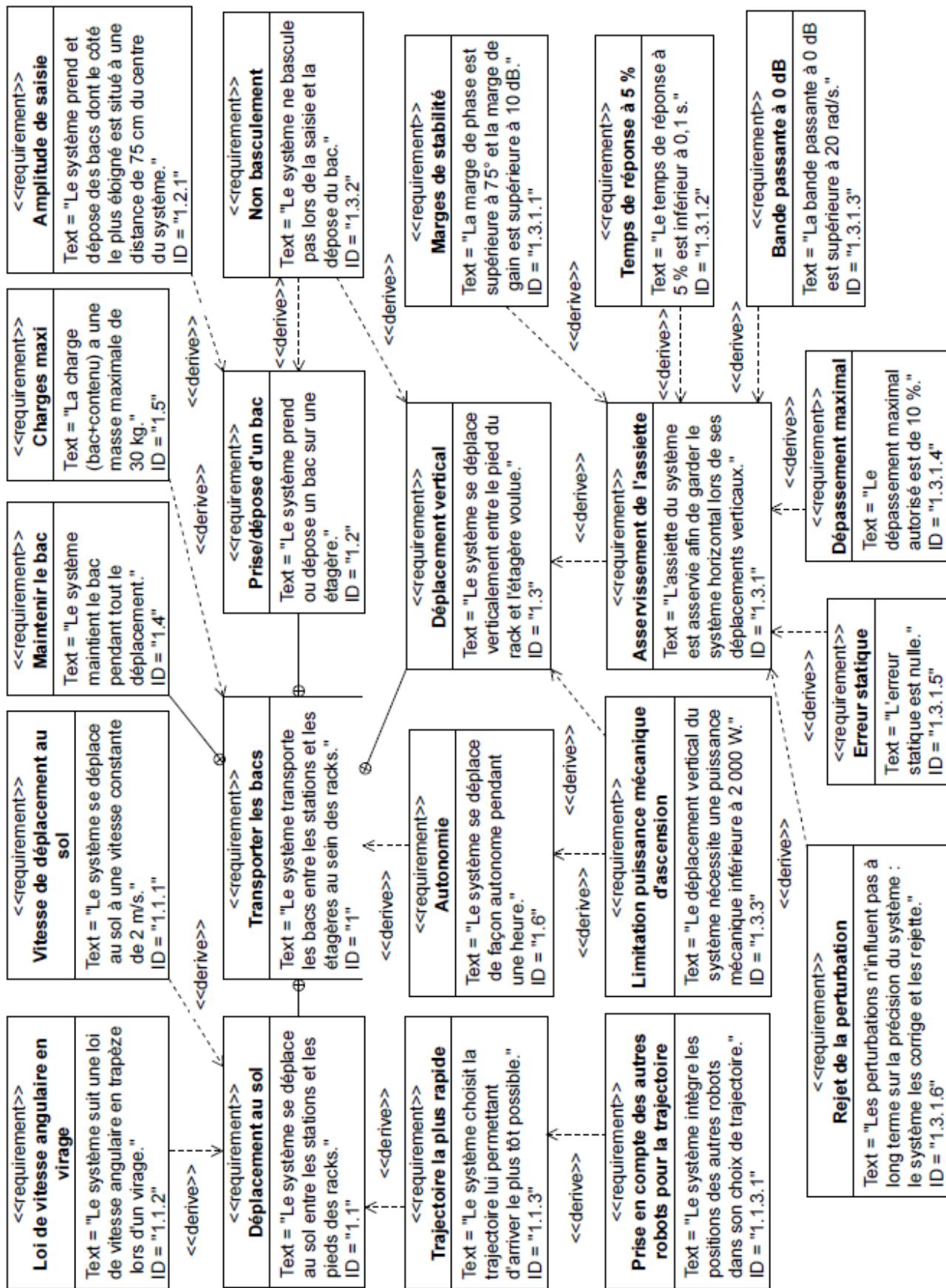
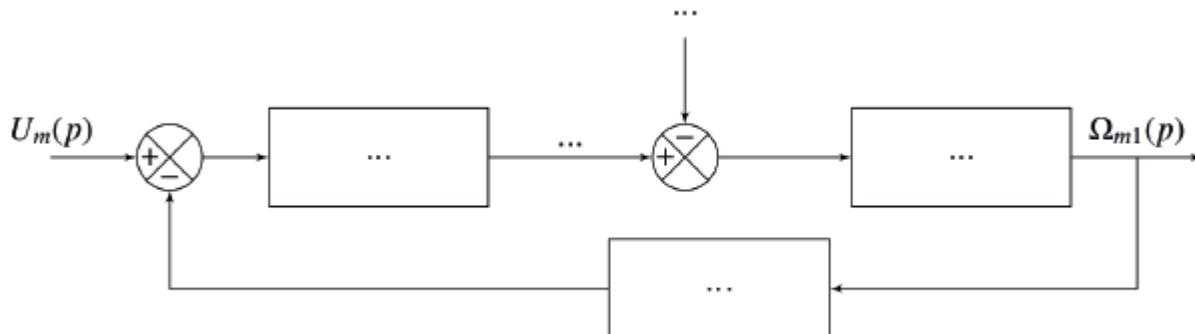


Figure 25 - Diagramme d'exigence extrait du cahier des charges du robot

NOM, Prénom :

DR1 - Schéma-blocs associé à un moteur

Q8. Compléter le schéma-blocs.



DR2 – Réponses fréquentielle (BO) et temporelle (BF), système non corrigé ($C_{corr}(p) = 1$)

Q16 et Q17. Vérification des exigences et tracé assymptotique

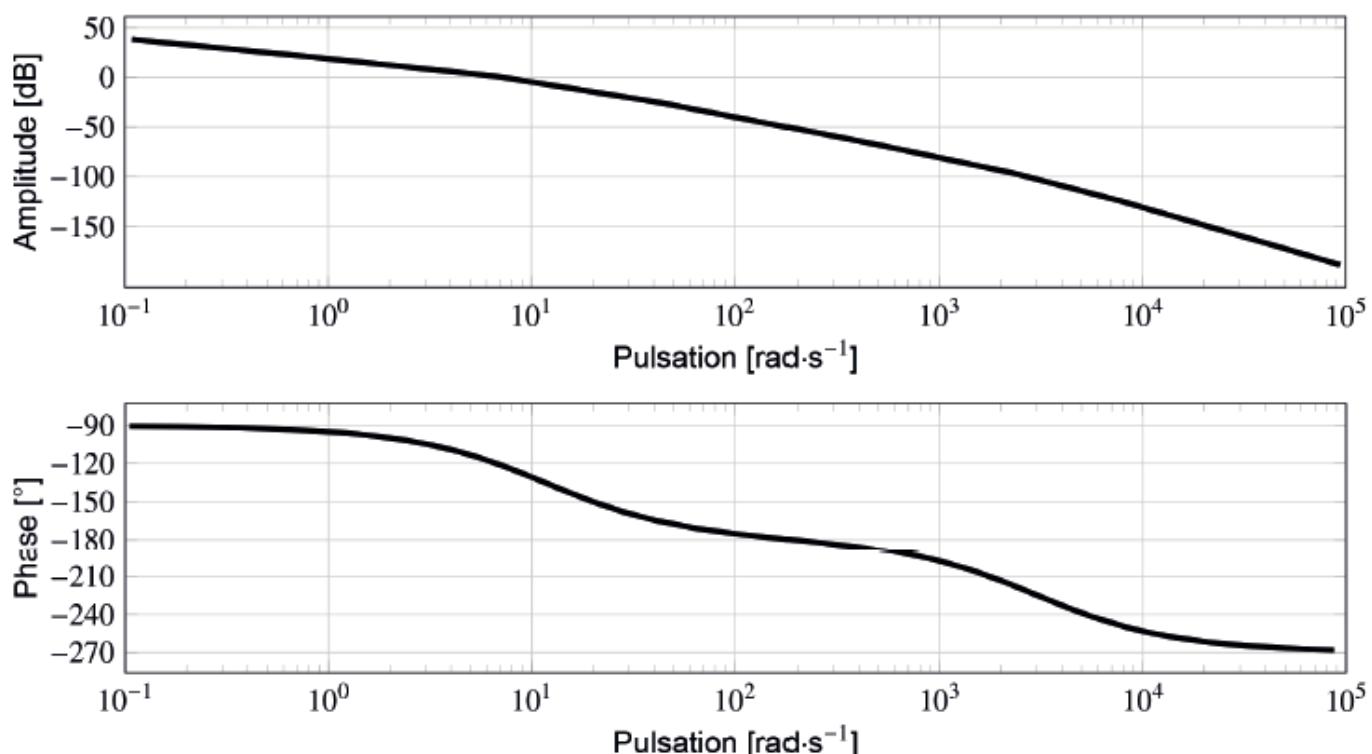
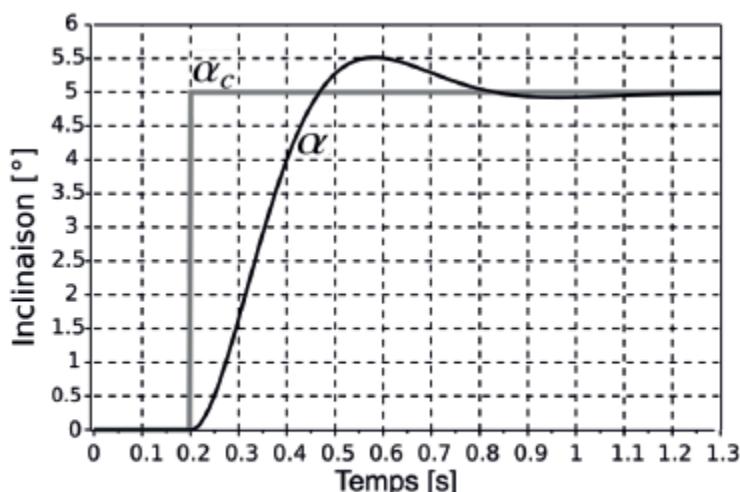


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée.

Vérification exigences :



Réponse temporelle du système non corrigé en boucle fermée

Vérification exigences: