

TD. A3

Calculs de limites

Exercices de cours

- ① Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$$

- Démontrer que (u_n) est bien définie.
- Démontrer que (u_n) est majorée et croissante.
- Démontrer que (u_n) est convergente et donner sa limite.
- On suppose maintenant que $u_0 = 4$.
La suite (u_n) converge-t-elle ?

- ② Démontrer l'équivalence :

$$1 - \cos u \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2}$$

- ③ Soit a et b deux réels. Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$$

- ④ Démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)_{(0)}$$

- ⑤ Calculer les limites suivantes.

- | | |
|--|---|
| a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x^3}{4x^2-2x+1}$ | b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x\sqrt{x}+5}$ |
| c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \ln x}{\sqrt{x} + \ln x}$ | d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^3+x-2)^2}{(x-1)^6}$ |
| e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^5-1}$ | f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{3x^5-1}$ |
| g. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{(x-1)}$ | h. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2x + \frac{\pi}{6})}{\sin(5x + \frac{\pi}{6})}$ |
| i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{\frac{x^2}{x+1}}$ | |

- ⑥ Étudier le comportement à l'infini des suites suivantes.

$a_n = \frac{5^n - 6^n}{5^n - 4^n}$	$b_n = \frac{4^n}{n^3 - n!}$
$c_n = \frac{n - 2^n}{e^n}$	$d_n = n(\ln(n+2) - \ln n)$
$e_n = (2n)^{\sin \frac{1}{n}}$	$f_n = n(\sqrt[n]{2} - 1)$
$g_n = \sqrt[n]{3 + \sin n}$	$h_n = \frac{n! \ln n}{\sqrt{n} e^n}$

Travaux dirigés

- ① Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{4}\}$ par :

$$f(x) = \frac{5x-1}{4x+1}.$$

- Étudier les variations de f .
- Démontrer que (u_n) est bien définie et incluse dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1]$.
- Démontrer que (u_n) converge et calculer sa limite.
- Soit maintenant v_n la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}.$$

Démontrer que v_n est bien définie et exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
- En déduire le terme général de la suite (u_n) .
Démontrer de nouveau qu'elle converge et retrouver sa limite.
- Donner un équivalent de $u_n - \ell$, où $\ell = \lim u_n$.

- ② On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 + \frac{6}{u_n}$.

On pose $f(x) = 1 + \frac{6}{x}$.

- Justifier que l'intervalle $I = [u_0, u_1]$ est stable par f , et en déduire que la suite (u_n) est bien définie et bornée.
- Décrire les variations de $g = f \circ f$.
En déduire que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.
- Démontrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

- ③ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par une valeur $u_0 \geq 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 7u_n}{2}} - 1$$

Soit $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 + 7x}{2}} - 1$ et $g : x \mapsto f(x) - x$.

- Décrire les variations de f et de g sur $\mathbb{R}_+^*$, et résoudre l'équation $g(x) = 0$.
- Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, convergente, et donner sa limite.
- Que peut-on dire si $u_0 \in [0, 1[$?

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}$$

avec n radicaux.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- En déduire que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

5 Étudier les limites des suites suivantes.

- $u_n = \sqrt{(n+a)(n+b)} - n \quad (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$
- $u_n = \frac{a}{n} \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor \quad v_n = \frac{n}{a} \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor \quad (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$
- $u_n = \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{\ln n}}$
- $u_n = \sqrt[n]{1 + \cos^2 n}$
- $u_n = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{n^2 - 3} \right\rfloor$
- $u_n = \sin n \sin \frac{1}{n}$
- $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n - \sqrt{n^2 - 1}}$
- $u_n = \sqrt[n]{5^n + 3^n}$
- $u_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n$
- $u_n = \frac{n!}{\pi^n \ln n}$
- $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k + n^2}$
- $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k + n}{k^2 + n^3}$
- $u_n = \tan \frac{\pi}{n} \tan \frac{n\pi}{2n+1}$
- $u_n = e^{2i\pi\sqrt{n^2+1}}$

6 Donner une suite la plus simple possible équivalente à chacune des suites suivantes.

- $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$
- $u_n = e^{\frac{1}{n}}$
- $u_n = n \sin \frac{\sqrt{n}}{(n+2)^2}$
- $u_n = \sin \left[\left(n + \frac{1}{n} \right) \pi \right]$
- $u_n = \ln(n+7) - \ln(n+3)$
- $u_n = \tan \frac{n\pi - 1}{2n}$
- $u_n = \ln(2n^3 + 5)$
- $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$
- $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+3}$
- $u_n = \sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}$
- $u_n = \sqrt[n]{n^4 + 1} - n$
- $u_n = \binom{n+k}{k} \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}$

7 Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions définies au voisinage de a .

a. Démontrer que :

$$f \underset{(a)}{\sim} g \iff f \underset{(a)}{=} g + o(g).$$

b. En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \tan 9x}{\tan x + \tan 4x}$$

8 On adopte la notation $f(x) \underset{a}{\ll} g(x)$ pour signifier $f(x) = o(g(x))$.

Ordonner les fonctions suivantes.

- $x, x^2, \sqrt{x}, \ln x, x \ln x, x \ln^2 x, \frac{x}{\ln x}$ en $+\infty$
- $x, x^2, \sqrt{x}, x \ln x, x \ln^2 x, x^2 \ln x, \frac{x}{\ln x}$ en 0
- $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{x}}, \ln x, \frac{1}{x \ln x}, \frac{\ln x}{x}$ en 0
- $n^5, n!, n!!, e^n, e^{n!}, 2^n, e^{\sqrt{n}}, \frac{e^n}{n^2}, n^3 e^n$ en $+\infty$.

9 Donner des équivalents simples de chacune des fonctions suivantes au point a indiqué.

- $f(x) = \frac{(2x+3)^4}{(x-1)^2}$ en $a = 0, a = 1, a = +\infty$
- $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^3}$ en $a = 0$
- $f(x) = \frac{e^{\sin x} - 1}{\cos x - 1}$ en $a = 0$
- $f(x) = \frac{\sin(nx) \cos(mx)}{\tan x}$ en $a = 0$ avec $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$
- $f(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^3}$ en $a = 0$ et $a = +\infty$
- $f(x) = x^{\sin x} - 1$ en $a = 0^+$
- $g(x) = \cos \sqrt{x} - 1$ en $a = 0^+$
- $h(x) = x^{\sin x} - \cos \sqrt{x}$ en $a = 0^+$
- $f(x) = \tan x$ en $a = \frac{\pi}{2}$

10 Calculer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin \sqrt{x}) \ln 2x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{\ln(x+1)}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x \ln^2 x$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^{\sin x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$
- $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 3x}{\cos \frac{x}{4}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{a^{x^2}} \quad (a > 1)$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\tan 6x}{\cos(x + \frac{\pi}{3})}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$