TD 7 (Corrigé définitif) : Réduction (I)

Ne sont corrigés que les exercices ou questions non traités en classe.

$\boxed{E \text{ désigne un } \mathbb{K} \text{ espace vectoriel de dimension } n \geq 1}$

$\boxed{\text{Si rien n'est mentionné, les matrices en jeu appartiennent à } M_n(\mathbb{K})}$

Exercice ($\star$) 1 *Etablir qu'une matrice diagonalisable est semblable à sa transposée.*

Solution :
Notons A cette matrice et donnons nous $D \in D_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
En transposant les deux membres de l'égalité précédente (1), il vient $A^t = (P^t)^{-1}DP^t$, ce puisque une matrice diagonale est symétrique.
Il en résulte que $A \sim D$ et $A^t \sim D$ et, par transitivité de $\sim$, $\boxed{A \sim A^t}$ ■

Exercice ($\star$) 2 *a) Prouver que si la matrice A est diagonalisable, A^2 l'est aussi.*
b) En considérant la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *étudier la réciproque.*

Solution :
a) On garde contexte et notations de la solution précédente.
Par évélation au carré des deux membres de (1) (cf solution précédente), nous obtenons $A^2 = PD^2P^{-1}$.
Comme D^2 est diagonale, on a bien $\boxed{A^2 \text{ diagonalisable}}$ □
b) $N^2 = 0_2$ est bien diagonalisable alors que N, nilpotente et non nulle (cf cours), ne l'est pas.
$\boxed{\text{Réciproque du a) fausse}}$ ■

Exercice ($\star$) 3 *Vérifier qu'un vecteur propre de $f \in L(E)$, associé à une valeur propre non nulle, appartient à l'image de f.*

Solution :
Notons donc x un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$.
Ainsi $f(x) = \lambda.x \Longleftrightarrow x = f(\dfrac{1}{\lambda}.x)$.
Ceci montre bien que $\boxed{x \in Im(f)}$ ■

Exercice ($\star$) 4 *Soient A, B deux matrices dont l'une (au moins) est inversible.*
Montrer que $Sp(AB) = Sp(BA)$.

Solution :
Supposons A inversible. Comme $BA = A^{-1}(AB)A$, on constate que $AB \sim BA$.
$\boxed{\text{Le spectre étant un invariant de similitude}}$: $\boxed{Sp(AB) = Sp(BA)}$ ■

Exercice ($\star\star$) 1 *Soient $A \in M_3(\mathbb{R})$ et f son endomorphisme canoniquement associé.*
i) Justifier l'existence d'une colonne propre $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *pour A^t.*
ii) Prouver que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + cz = 0\}$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par f.
iii) Démontrer que f possède au moins une droite et un plan stables.

Solution :
i) On pose $B = A^t$.
$\boxed{\text{Tout polynôme à coefficients réels, de degré impair possède une racine réelle } (\heartsuit)}$.
Donc ici χ_B (de degré 3 et à coefficients réels) possède au moins une racine réelle, notée $\boxed{\gamma}$ et ainsi B possède une valeur propre (réelle) et on peut donc lui associer une colonne propre de $B\square$
ii) On posera $\Gamma = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on notera que $(x, y, z) \in F \iff \Gamma^t X = 0$.
Donnons nous $(x, y, z) \in F$ et montrons que $(AX)^t \in F$.
Pour cela on calcule $\Gamma^t(AX) = \Gamma^t B^t X = (B\Gamma)^t X = \gamma(\Gamma^t X) = 0$.
Nous avons montré la stabilité voulue$\square$
iii) Outre le plan F, γ est aussi valeur propre de f (le spectre d'une matrice et de sa transposée sont identiques) donc f possède un vecteur propre qui engendre (cf cours) une droite vectorielle stable par f$\blacksquare$

Exercice $(\star\star)$ **2** *Soit* $f \in L(\mathbb{R}^5)$ *tel que* $f^3 + f^2 + f = \omega$.
Déterminer les valeurs possibles de $tr(f)$.

Solution :
Notons $A \in M_5(\mathbb{R})$ la matrice à laquelle f est canoniquement associé et on pose $P = X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1) = X(X - j)(X - \overline{j})$ qui se trouve être un polynôme annulateur de A (car de f). Dès lors $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, j, \overline{j}\}$. Attribuons à $0, j, \overline{j}$, valeurs propres potentielles de A, des multiplicités a, b, c (en convenant que celle-ci vaut 0 si le nombre attaché n'est pas valeur propre de A). Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, on a nécessairement $\boxed{a + b + c = 5}$.
Mais $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ donc $(\heartsuit)$ prouve que 0 est nécessairement valeur propre de A donc $a \in \mathbb{N}^*$.
$\boxed{\text{Enfin les multiplicités de deux racines conjuguées d'un polynôme à coefficients réels sont égales}}$ d'où $b = c$.
Enfin (cf cours) $tr(f) = tr(A) = a \times 0 + b \times j + c \times \overline{j} = -b$ sachant que $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times N$ est contraint par $a + 2b = 5$.
Les possibilités sont donc $a = 1$ et $b = 2 \Longrightarrow \boxed{tr(f) = -2}$,
$a = 3$ et $b = 1 \Longrightarrow \boxed{tr(f) = -1}$ et
$a = 5$ et $b = 0$ auquel cas $\boxed{tr(f) = 0}$$\blacksquare$
NB : On peut se demander si ces trois cas sont réalisables. Pour le dernier c'est évident (prendre $A = 0_5$), pour les deux premiers cela l'est beaucoup moins. Considérons $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (dont le polynôme caractéristique est $X^2 + X + 1$ et donc possède P comme polynôme annulateur) alors $A = diag(0, M, M)$ (resp. $A = diag(0_3, D)$) satisfait le premier (resp. le second) cas$\blacksquare$

Exercice $(\star\star)$ **3** *Soient* n *un entier impair supérieur ou égal à 3 et* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *tels que* $A^3 + A - I_n = 0_n$.
Montrer que $\det(A) > 0$. *(Passer aux complexes)*

Exercice $(\star\star)$ **4** *Ici* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *et on se donne* f, g *de* $L(E)$ *permutables.*
Montrer que ces deux endomorphismes possèdent un vecteur propre en commun

Solution :
$\boxed{\text{Tout endomorphisme d'un } \mathbb{C} \text{ ev de dimension finie} \geq 1 \text{ possède valeur propre et donc vecteur propre (⚠).}}$
On peut donc considérer un sous-espace propre F de f (par définition un sep est de dimension non nulle).
La permutabilité de g et f permet d'affirmer que F est stable par g et ainsi il est possible de définir $h \in L(F)$, l'endomorphisme de F induit par g.
Par la propriété $\boxed{\text{(⚠)}}$, h possède un vecteur propre qui est élément de F donc (car non nul) un vecteur propre de f mais aussi de g puisque l'effet de h est celui de $g$$\blacksquare$

Exercice $(\star\star\star)$ **1** *Soit* $A \in Gl_n(\mathbb{C})$ *telle que* A^2 *soit diagonalisable.*
A est-elle diagonalisable?

Solution :
Notons $\mu_1, ..., \mu_s$ les différentes valeurs propres de A^2. La diagonalisabilité de cette matrice (cf cours) que

$P = \prod_{i=1}^{s}(X - \mu_i)$ est un polynôme annulateur de A^2.
Le caractère inversible de A entraînant celui de A^2 tous les μ_i sont non nuls et possèdent deux racines carrées complexes distinctes $\pm u_i$. Dès lors en posant $Q = \prod_{i=1}^{s}(X - u_i)(x + u_i)$, on dispose d'un polynôme complexe scindé et à racines simples pour lequel:
$Q(A) = \prod_{i=1}^{s}(A - u_i I_n)(A + u_i I_n) = \prod_{i=1}^{s}(A^2 - \mu_i) = P(A^2) = 0_n$.
Ceci montre bien que A est diagonalisable■

Exercice ($\star\star\star$) **2** *(Centrale)*
$\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ *sont elles diagonalisables ?*

Exercice ($\star\star\star\star$) **1** *Les assertions suivantes sont-elles équivalentes?*
a) A est trigonalisable?
b) Il existe un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$ de A.

Solution :
$a) \Longrightarrow b)$ provient de la caractérisation de la tz donnée en cours, un polynôme annulateur étant (Cayley-Hamilton) le polynôme caractéristique de A.
Inversement on suppose (puisque toute matrice à coefficients complexes est tz) que $\mathbb{K} = R$.
Puisqu'il existe un polynôme annulateur de A scindé sur $\mathbb{R}$ cela signifie que le spectre complexe de A est inclus dans $\mathbb{R}$ donc que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ soit que A est tz■

Exercice ($\star\star\star\star$) **2** *Soit $A \in S_2(\mathbb{Q})$.*
a) $\sqrt{2}$ peut-il être un élément du spectre de A?
b) Même question avec $\sqrt{3}$.

Solution :
b) On cherche donc trois rationnels a, b, c de sorte que, pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, on ait $\chi_A(\sqrt{3}) = 0$.
Cette dernière condition donne $3 - (a + c)\sqrt{3} + ac - b^2 = 0$ mais sachant que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ il faut que $a + c = 0$ et $a^2 + b^2 = 3$.
Pouvons nous trouver (en écrivant $a = \frac{p}{r}$ et $b = \frac{q}{s}$) $(p, q, r, s) \in \mathbb{Z}^2 \times (Z^*)^2$ tels que $(ps)^2 + (qr)^2 = 3(rs)^2$?
On s'intèresse donc à l'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$ en entiers naturels avec $z \neq 0$.
Supposons qu'il existe (x, y, z) une telle solution et choisissons la telle que z soit minimal.
On voit que x et y doivent être divisibles par 3 pour ne pas aboutir à une contradiction (le premier membre de l'équation ne serait pas divisible par 3).
On pose alors $x = 3X$, $y = 3Y$ et on récupère $3(X^2 + Y^2) = z^2$, ce qui implique z est aussi divisible par 3.
On pose $z = 3Z$, où $0 < Z < z$ et on a : $X^2 + Y^2 = 3Z^2$; la minimalité de z est contredite.
Donc une telle matrice n'existe pas■