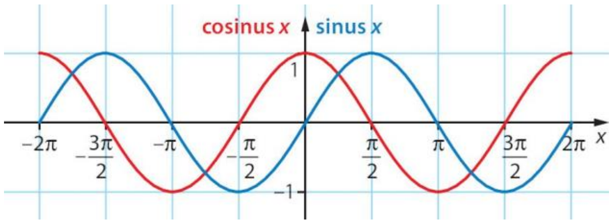
Pour tout x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période 2π radians (360°).



Exercice résolu

La houle peut être modélisée par une onde sinusoïdale de période *T*. L'élongation *y* (en mètres) d'un point M de l'océan d'abscisse *x* au cours du temps est modélisée par la fonction :

$$y(t) = 2 \times \cos\left(\frac{2\pi \times t}{6}\right)$$

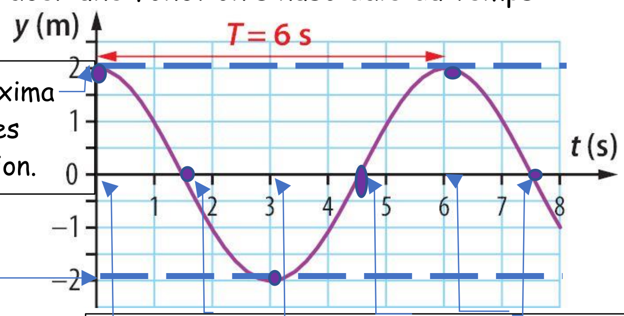
1. Déterminer $y(t=0\,s)$, $y(t = 1{,}5\ s)$, $y(t = 3{,}0\ s)$, $y(t = 4{,}5\ s)$, $y(t = 6{,}0\ s)$ et $y(t = 7{,}5\ s)$.
2. Tracer $y(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 7{,}5$ s. En déduire *T*.

t (s)	0	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5
y (m)	2	0	-2	0	2	0
	0	T/4	T/2	3T/4	T	…

Solution commentée

Méthode pour tracer une fonction sinusoïdale du temps :

1/ On trace les maxima (= **Amplitude**) et les minima de la fonction.



2/ On gradue l'axe des abscisses en faisant apparaître dans l'ordre :
- l'origine, la période T,
- la demi-période T/2,
- puis les quarts de période T/4 et 3T/4

3/ On place les points remarquables de la fonction

4/ On trace la courbe en cohérence avec des tangentes horizontales au niveau des extrema.

Remarques complémentaires :

- Une fonction sinusoïdale du temps (le point M fixé) s'écrit :

  $y_M(t) = A.\cos(\frac{2\pi.t}{T})$; On fait ainsi apparaître :
  - la période temporelle **T**
  - L'amplitude *A*.
- Une fonction sinusoïdale de la variable espace x (l'instant t est fixé) s'écrit :

  $Y_t(x) = A.\cos(\frac{2\pi.x}{\lambda})$; On fait ainsi apparaître :
  - la période spatiale λ
  - L'amplitude *A*.
- Pour représenter une onde sinusoïdale progressive de célérité v, il faut représenter à différentes instants t la fonction sinusoïdale qui se sera alors propagée sur une distance $d = v.t$.

  La représentation de la fonction f(x- a) est identique à celle de f(x) mais décalée suivant l'axe des x de a. Donc la représentation de :

  $$A.\cos\left(\frac{2\pi.(x-d)}{\lambda}\right) = \mathrm{A}.\cos\left(\frac{2\pi.x}{\lambda} - \frac{2\pi.v.t}{\lambda}\right) = \mathrm{A}.\cos\left(\frac{2\pi.x}{\lambda} - \frac{2\pi.t}{T}\right)$$

  est bien la représentation de $A.\cos(\frac{2\pi.x}{\lambda})$ mais décalée, ou encore qui se serait propagée, de d.

  C'est pourquoi, pour la simuler, nous représenterons une onde progressive sinusoïdale en calculant à plusieurs instants et plusieurs positions la fonction :

  $$\boldsymbol{y_{M,t} = \mathrm{A}.\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi.x}{\lambda}\right).}$$

Programmation de la simulation de la propagation d'une onde sinusoïdale

La stratégie ressemble à l'élaboration d'un film d'animation :

ou d' un folioscope (ou flipbook) :

https://youtu.be/gNYZH9kuaYM

La perception d'un mouvement provient du défilement d'images d'un même objet :
- redessiné sur chacune des pages successives
- et présentant un ou plusieurs déplacements entre deux images consécutives.
- On tourne la page ou on passe à l'image suivante au bout d'une certaine durée : on se retrouve donc sur un support neutre avant de dessiner la nouvelle image.

Nous adopterons la même stratégie pour notre programme :

\# Déclaration de variables

T, λ, A, longueur L de la corde — # Données constantes du dispositif
Tableau de valeurs d'abscisses x
Tableau de valeurs d'ordonnées y
Tableau de valeurs de temps t

Importation de bibliothèques de fonctions utiles :
« maths » pour la fonction sin()
« matplototlib » pour la construction de graphes

Pour chacune des valeurs de t : — # Boucle de calculs de y(x) et défilement du graphe correspondant à chaque instant

On calcule toutes les valeurs de y pour chacune des valeurs de x.
On trace les éléments de repérage du graphe, les annotations.
On reporte les points de coordonnées (x, y).

On impose un temps de pause — # Notre perception du défilement du temps
On efface le contenu de la mémoire graphique — # Pour être remplacé par le graphe correspondant à l'instant suivant.

Afficher le graphique à l'écran

Simulation de la propagation d'une onde le long d'une corde avec Python

```
from math import*
from matplotlib import pyplot

L = 1000
période = 50
longueurOnde = L/2.5
amplitude = 100
list_x = []
list_y = []

for t in range (0,3*période) :
        list_x = []
        list_y = []
        for point in range (0,L) :  #permet de créer une liste d'ENTIERS, le dernier n'est pas
                                    pris en compte

                list_x.append(point)
                list_y.append(amplitude*sin(2*pi*t/période - 2*pi*list_x[point]/longueurOnde))

        pyplot.clf()
        pyplot.axis([0,L,-L/2,L/2])        #Fixe les valeurs minimales et maximales
        pyplot.xlabel("x(mm)")     #Indique la grandeur et l'unité sur l'axe des abscisses
        pyplot.ylabel ("y(mm)")    #Idique la grandeur et l'unité sur l'axe des ordonnées
        pyplot.title("Propagation d'une onde sinusoïdale le long d'une corde")
        pyplot.plot (list_x, list_y, c = 'blue', marker = 'o')
        pyplot.pause(0.1) #Fais varier le temps par pas de 0,1 s)

pyplot.show()
```

Simulation de la propagation d'une onde le long d'un ressort

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import*

periode = 20
amplitude = 9
longueurOnde = 120
ressort = 510

for t in range (0,4*periode, 2) :
        plt.clf()
        plt.plot([-10,ressort],[0,0], color = 'magenta')
        for x in range(0,ressort,10):
                dx = amplitude*cos(2*pi*t/periode - 2*pi*x/longueurOnde)
                plt.plot([x+dx,x+dx],[-50,50], color = 'black')
                plt.axis('equal')
                plt.xlabel("x(mm)")
                plt.ylabel("y (mm)")
                plt.title("Propagation d'une onde périodique le long d'un ressort")
                plt.pause(0.1)

plt.show()
```