Corrigé partiel du T. D. A4
Calculs de limites

$\boxed{3}$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par une valeur $u_0 \geqslant 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 7u_n}{2}} - 1$$

Soit $\ f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+7x}{2}} - 1 \quad$ et $\quad g : x \mapsto f(x) - x$.

a. Décrire les variations de f et de g sur $\mathbb{R}_+^*$, et résoudre l'équation $g(x) = 0$.

b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, convergente, et donner sa limite.

c. Que peut-on dire si $u_0 \in [0, 1[$?

a. La fonction $x \mapsto \frac{x^2+7x}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\frac{x^2+7x}{2} \in \mathbb{R}_+^*$, et la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition et somme la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = \frac{2x+7}{2\sqrt{2(x^2+7x)}}$$

Cette dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

Par somme la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g'(x) = \frac{2x+7}{2\sqrt{2(x^2+7x)}} - 1$$

En étudiant le signe de cette dérivée on obtient l'équivalence :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g'(x) \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4x^2 + 28x - 49 \leqslant 0$$

Les racines de ce dernier trinôme du second degré sont $\frac{7}{2}\left(-1 \pm \sqrt{2}\right)$.

On pose $\alpha = \frac{7}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$, alors g est croissante sur $]0, \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, +\infty]$.

Les solutions de l'équation $g(x) = 0$ sont $x = 1$ et $x = 2$.

b. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $f(1) = 1$.

Ceci permet de démontrer que l'intervalle $[1, +\infty[$ est stable par f.

Comme $u_0 \in [1, +\infty[$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et incluse dans cet intervalle.

Comme f est croissante sur $[1, +\infty[$ alors la suite (u_n) est monotone.

Pour déterminer son sens de variation on cherche le signe de $u_1 - u_0$, donc de $g(u_0)$.

Les variations de g montrent que g est positive sur $[1, 2]$, négative ailleurs, donc la suite (u_n) est croissante si $u_0 \in [1, 2]$, décroissante si $u_0 \in [2, +\infty[$.

Comme f est croissante sur $[1, +\infty[$ avec $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$, alors les intervalles $[1, 2]$ et $[2, +\infty[$ sont stables par f. On sépare alors deux cas :

- Si $u_0 \in [1, 2]$ alors (u_n) est incluse dans $[1, 2]$, donc elle est croissante majorée.
- Si $u_0 \in [2, +\infty[$ alors (u_n) est incluse dans $[2, +\infty[$, donc elle est décroissante minorée.

Dans les deux cas, par le théorème de la limite monotone elle converge.

Comme f est continue sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, donc $g(\ell) = 0$.

D'après la question précédente $\ell = 1$ ou $\ell = 2$.

On considère maintenant trois cas :

- Si $u_0 = 1$ alors (u_n) est constante égale à 1, donc elle converge vers 1.
- Si $u_0 \in]1, 2]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_0 \leqslant u_n \leqslant 2$, donc $u_0 \leqslant \ell \leqslant 2$ par théorème de comparaison, ce qui implique $1 < \ell \leqslant 2$ et donc $\ell = 2$. La suite converge vers 2.
- Si $u_0 \geqslant 2$ alors la suite u_n est décroissante minorée par 2, donc $\ell = 2$.

Finalement la suite (u_n) converge vers 1 si $u_0 = 1$ et vers 2 si $u_0 > 2$.

c. Si $u_0 \in [0, 1[$ alors la suite (u_n) n'est pas définie, car à partir d'un certain rang on a $u_n \in [-1, 0[$, donc u_{n+1} n'est pas défini.

On démontre ceci par l'absurde.

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Comme $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2+7u_n}{2}} - 1 \quad$ alors : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geqslant -1$.

Ceci s'écrit aussi : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geqslant -1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme u_{n+1} est défini et $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2+7u_n}{2}} - 1$ alors $u_n^2 + 7u_n \geqslant 0$, ce qui donne $u_n \in]-\infty, -7] \cup [0, +\infty[$, et donc $u_n \geqslant 0$.

Ainsi la suite (u_n) est minorée par 0. Comme la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors (u_n) est monotone. Comme $u_0 \in [0, 1[$ et g est négative sur $[0, 1[$ alors $u_1 \leqslant u_0$, donc la suite (u_n) est décroissante.

Elle est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. Sa limite ℓ vérifie $\ell \leqslant u_0$, donc $\ell < 1$.

Mais l'équation $f(\ell) = \ell$ n'admet que $\ell = 1$ et $\ell = 2$ pour solutions.

Cette contradiction montre que la suite (u_n) n'est pas définie.