Intégrales Généralisées (Version provisoire)

Il est fort probable que la numérotation utilisée ici ne corresponde pas à celle du cours! Par ailleurs certains résultats seront complétés par la suite. Il s'agit d'un état des lieux prenant en compte uniquement les points développés à ce jour.

1 Fonctions Continues par Morceaux sur un intervalle

Voir Cours.

2 Présentation des intégrales généralisées. Premières propriétés.

Voir Cours.

3 Intégrales généralisées de fonctions positives

Déjà traité en cours mais repris par commodité.

3.1 Le Principe Fondamental

I désigne ici l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$ (resp.$]a,b]$) et f une fonction continue par morceaux sur I et à valeurs $\boxed{\text{positives}}$.

On pose, pour $x \in I$: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ (resp. $F(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)dt$.

Tout repose sur le fait simplissime :

Proposition 1 *(CNS de convergence pour une intégrande positive)*
i) F est croissante sur I.
ii) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f(t)dt$ converge si et seulement si F est majorée sur I.

Ce critère, plutôt théorique, permet de prouver les principes de comparaison qui vont suivre.

3.2 Comparaison pour les intégrandes positives

I désigne encore l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$ (resp.$]a,b]$) et f, g des fonctions continues par morceaux sur I.

Définition 1 *Pour $I = [a,b[$ (resp. $I =]a,b]$), on appelle* $\boxed{\textit{voisinage de } b \textit{ (resp. de } a)}$ *tout invervalle du type $[c,b[$ (resp. $]a,c]$), où c est un élément de I.*

Voilà enfin le résultat essentiel :

Remarque 1 *Vous noterez l'analogie avec les séries à termes positifs.*
⚠ $\boxed{\textit{Il faudra aussi comprendre que la comparaison doit porter sur les intégrandes !!}}$.

Proposition 2 $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont supposées POSITIVES au voisinage de } b \text{ (resp. de } a)}$

i) Si $\boxed{f \leq g \text{ au voisinage de } b \text{ (resp. de } a) \text{ et si } \int_I g(t)dt \text{ converge}}$ *alors* $\boxed{\int_I f(t)dt \text{ converge}}$.

Par contraposition :

ii) Si $\boxed{f \leq g \text{ au voisinage de } b \text{ (resp. de } a) \text{ et si } \int_I f(t)dt \text{ diverge}}$ *alors* $\boxed{\int_I g(t)dt \text{ diverge}}$.

iii) Si $\boxed{f(t) \underset{t\to b}{=} o(g(t)) \text{ (resp. } f(t) \underset{t\to a}{=} o(g(t))) \text{ et } \int_I g(t)dt \text{ converge}}$ *alors* $\boxed{\int_I f(t)dt \text{ converge}}$.

Même topo si on remplace o par O.

iiii) Si $\boxed{f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t) \text{ (resp. } f(t) \underset{t\to a}{\sim} g(t))}$ *alors* $\boxed{\int_I f(t)dt \text{ et } \int_I g(t)dt \text{ sont de même nature}}$.

Afin d'utiliser ces principes il convient d'avoir des éléments de comparaison. Nous les rappelons dans la section à venir; celle-ci sera amené à s'étoffer quelque peu et à se réinterpréter.

4 Les intégrales de référence version 0

4.1 Intégrales généralisées de Riemann

Proposition 3 *α étant un réel :*

o) $t \to \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

i) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

ii) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

De là on déduit avec les principes de comparaison déjà énoncés :

Corollaire 1 *(Règle du x^α en $+\infty$)*

Soient $c > 0$ et $f \in C_M([c, +\infty[, \mathbb{R}_+)$.

i) $\boxed{\exists \alpha > 1 \text{ tel que } x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Longrightarrow \int_c^\infty f \text{ converge}}$.

ii) $\boxed{\exists \alpha \leq 1 \text{ tel que } x^\alpha |f(x)| \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty \Longrightarrow \int_c^\infty f \text{ diverge}}$.

Remarque 2 *On dispose d'une règle analogue en 0 que je vous laisse énoncer.*

4.2 Intégrales généralisées de type exponentiel

A SAVOIR ABSOLUMENT 1 *α étant un complexe :*

o) $t \to e^{-\alpha t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt$ converge si et seulement si $\Re(\alpha) > 0$, dans ce cas $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}$.

4.3 Cas du logarithme

Proposition 4 *o)* $\ln$ *est continue sur]0,1].*

i) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ converge.

5 Plan d'étude d'une intégrale généralisée pour une intégrande à signe constant au voisinage d'une borne problématique

Là encore, il s'agit d'actions provisoires.

A SAVOIR ABSOLUMENT 2 *(et à suivre)*
a) Préciser l'intervalle de continuité (voire de CM) de l'intégrande (nommée f ici) relativement à l'intervalle d'intégration. En déduire les bornes à problème (1 dans le cas semi-ouvert, 2 pour intervalle ouvert) et constater que la fonction répond bien aux exigences de signe indiquées.
b) Si en une borne à problème FINIE, f possède une limite FINIE; il y a fausse singularité et en cette borne l'IG CV. ATTENTION ceci n'a aucun sens en $\pm\infty$ ⚠
c) On privilégie l'emploi des principes de comparaison en les appliquant à bon escient (les appliquer à $-f$ si le signe local de f est négatif).

Traitons quelques situations; f désignera systématiquement l'intégrande.
Nous présentons auparavant un glissement terminologique dont vous comprendrez mardi 4 novembre le sens.

Définition 2 *(Intégrabilité 0)*
Convenons d'appeler intégrables sur un intervalle I toute fonction continue par morceaux sur cet intervalle, de signe constant aux voisinages des bornes de I non dans I et telle que l'intégrale généralisée $\int_I f(t) dt$ converge.
Vous voyez sans peine que toutes les intégrandes des intégrales de référence répertoriées sont intégrables sur les intervalles où elles sont continues et vous oberverez en outre que ii), iii), iiii) du théorème de comparaison ainsi que la règle du x^α s'appliquent à ces fonctions.

Exemple 1 *(Intégrale de Gauss)*
Nature de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$?
On note que f est continue (donc CM) et positive sur $\mathbb{R}_+$.
Une seule borne problématique : $\boxed{+\infty}$.
Pour $t \geq 1$ (puisque dans ce cas $t \leq t^2$) nous avons $|f(t)| = e^{-t^2} \leq e^{-t}$. la fonction majorante est notoirement intégrable sur $[1, +\infty[$ donc par comparaison, notre IG CV■

Exemple 2 *Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^3)}$?*
f est continue (donc CM) et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
Deux bornes problématiques 0 et $+\infty$.
En 0, f n'a pas de limite finie (pas d'espoir de fausse singularité donc) mais $|f(x)| \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$. On sait que $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc par comparaison, $\int_0^1 |f(x)| dx$ converge soit aussi $\int_0^1 f(x) dx$.
En $+\infty$: $|f(x)| \sim \frac{1}{x^{5/2}}$; comme $x \to \frac{1}{x^{5/2}}$est intégrable sur $[1, +\infty[$, on a, par le même principe de comparaison la convergence de $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.
Conclusion $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^3)}$ converge■