

Devoir Libre 2 : À rendre pour le lundi 10 novembre

- les réponses illisibles ne seront pas corrigées ;
- indiquez le numéro de chaque question traitée en respectant la numérotation de l'énoncé ;
- les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez ;
- si vous constatez ce qui vous paraît être une erreur d'énoncé, vous l'indiquez dans votre copie et vous poursuivez votre rédaction, en précisant, le cas échéant, les initiatives que vous êtes amené à prendre.

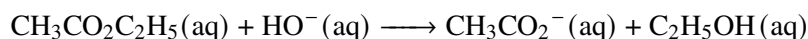
Exercice 1 : Saponification

Consignes :

- pour les parties B et C vous rendrez un seul fichier Python que vous déposerez dans le dossier « dépôt_DM2 » du site PrépaBellevue ;
- vous nommerez votre fichier « DM2_Votre(vos)nom(s).py »

A. Cinétique Chimique

La réaction de saponification de l'acétate d'éthyle suit une loi de vitesse d'ordre global égal à 2. Elle produit des ions éthanoate et de l'éthanol selon l'équation :



On part des conditions initiales :

$$[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5]_0 = [\text{HO}^-]_0 = a_0 = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

On note $a = [\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5]$ et k la constante de vitesse.

1. Montrer que :

$$\frac{1}{a(t)} - \frac{1}{a_0} = kt$$

Au bout de 20 mn on prélève un volume $V_b = 100 \text{ cm}^3$ du système, on réalise une trempe (refroidissement du prélèvement), puis l'on dose les ions hydroxyde dans le prélèvement à l'aide d'une solution d'acide chlorhydrique ($\text{H}^+(\text{aq}) + \text{Cl}^-(\text{aq})$) de concentration $C_a = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Il faut un volume $V_a = 6,16 \text{ cm}^3$ de solution d'acide chlorhydrique pour obtenir l'équivalence.

2. Calculer la valeur de k .
3. Calculer le volume de solution d'acide chlorhydrique pour neutraliser un second prélèvement de 100 cm^3 effectué 20 minutes plus tard.
4. On étudie la même réaction de saponification mais avec des conditions initiales différentes :

$$[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5]_0 = a_0 = 2,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad ; \quad [\text{HO}^-]_0 = b_0 = 5a_0 = 1,0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

On suppose que les ordres partiels sont égaux à 1. Montrer que

$$-\frac{da}{dt} = ka(a + 4a_0) \quad (1)$$

B. Résolution numérique par la méthode d'Euler

On veut résoudre numériquement l'équation différentielle 1 par la méthode d'Euler (voir document 1).

5. Expliquer (en commentaire sur le code) ce que fait la fonction `euler` du code Python (lignes 10 à 21).
6. Compléter la ligne 25 de définition de la fonction f associée à l'équation différentielle 1.
7. Compléter les lignes 28 et 29 pour pouvoir tracer les solutions obtenues par la méthode d'Euler pour des pas $h = 0,001 \text{ min}$ et $h = 0,1 \text{ min}$.

C. Résolution numérique par la fonction odeint

On utilise rarement la méthode d'Euler pour résoudre une équation du type $\dot{a} = f(a, t)$. Il existe en effet des outils plus performants : dans la librairie `scipy.integrate` se trouve la fonction `odeint`, plus simple à utiliser et qui emploie des méthodes de calcul plus précises et plus stables que la méthode d'Euler.

Elle prend comme arguments la fonction f , la valeur initiale a_0 et la liste des temps commençant à t_0 . Elle renvoie le tableau (`numpy.array`) des valeurs a_i .

8. Compléter la ligne 33. Exécuter le code et conclure.

Document 1 : méthode d'Euler

On considère une fonction $a(t)$ vérifiant pour $t > 0$ une équation différentielle du type

$$\frac{da}{dt} = f(a, t)$$

où f est une fonction des variables a et t .

La méthode repose sur l'approximation de la dérivée par son taux de variation :

$$\frac{da}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(t+h) - a(t)}{h} \approx \frac{a(t+h) - a(t)}{h}$$

L'approximation est d'autant meilleure que le pas h est petit.

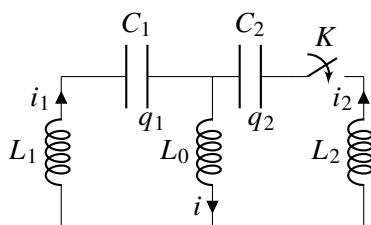
Notons $t_i = i \times h$ où $i \in \mathbb{N}$ et $a_i = a(t_i)$. En utilisant cette approximation :

$$a_{i+1} \approx a_i + h f(a_i, t_i)$$

Connaissant a_0 , on peut donc estimer les a_i par récurrence.

Exercice 2 : Oscillateurs couplés

On considère le circuit schématisé ci-dessous. Initialement, seul le condensateur de la branche 2 porte la charge $q_2(0) = Q_0$; le condensateur de la branche 1 est déchargé, aucun courant ne circule dans les circuits. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .



1. Établir les équations différentielles vérifiées par q_1 et q_2 en respectant les choix d'orientation de l'énoncé. Montrer que, dans le cas où $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$, elles sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \Omega^2 q_1 = \alpha \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 + \Omega^2 q_2 = \alpha \ddot{q}_1 \end{cases}$$

et exprimer α et Ω en fonction de L , L_0 et C .

2. Ces équations différentielles ne sont pas indépendantes : elles sont couplées.

Pour quelle valeur de L_0 les équations sont-elles découplées ? Interpréter.

3. Préciser les conditions initiales $q_1(0^+)$, $q_2(0^+)$, $\dot{q}_1(0^+)$ et $\dot{q}_2(0^+)$.

4. Pour résoudre les équations différentielles vérifiées par q_1 et q_2 on les découple en introduisant les variables S et D définies par $S = q_1 + q_2$ et $D = q_1 - q_2$.

Montrer qu'à l'aide de combinaisons linéaires, on peut obtenir deux équations différentielles découplées en S et D , c'est-à-dire une portant uniquement sur S et l'autre uniquement sur D .

On notera Ω_S et Ω_D les pulsations respectives de $S(t)$ et $D(t)$ que l'on exprimera en fonction de α et Ω .

5. Résoudre ces équations différentielles pour exprimer $S(t)$ et $D(t)$ en fonction de Q_0 , Ω_S ou Ω_D .

6. En déduire les expressions de $q_1(t)$ et $q_2(t)$.

7. On se place dans le cadre d'un couplage faible pour lequel $L_0 \ll L$ soit $\alpha \approx 0$.

Montrer que

$$\begin{cases} q_1(t) \approx -Q_0 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\Omega t\right) \sin(\Omega t) \\ q_2(t) \approx Q_0 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\Omega t\right) \cos(\Omega t) \end{cases}$$

Données :

- pour $\varepsilon \approx 0$ on a $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$
- formules trigonométriques :

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad ; \quad \cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

8. Tracer, en justifiant, l'allure des courbes $q_1(t)$ et $q_2(t)$ dans le cas d'un couplage faible.