DS 2 Mines : Fin de Corrigé.

Troisième partie

Dans toute cette partie, A est une matrice **strictement positive** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On se propose de démontrer les propriétés suivantes.

(i) $\rho(A) > 0$, $\rho(A)$ est une valeur propre de A et toute autre valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A vérifie $|\lambda| < \rho(A)$.

(ii) $\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique de A et $\ker(A - \rho(A)I_n)$ est engendré par un vecteur v_0 dont toutes les composantes sont strictement positives.

(iii) Si v est un vecteur propre de A dont toutes les composantes sont positives, alors $v \in \ker(A - \rho(A)I_n)$.

(iv) Pour tout vecteur positif non nul x, il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{A^k x}{\rho(A)^k} = cv_0$.

13. Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que si

$$|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|,$$

alors le vecteur $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix}$.

Solution :
Elucidons le cas $n = 2$.
On suppose donc que les complexes u et v vérifient $|u + v| = |u| + |v|$.
On pose par ailleurs $u = |u|e^{ia}$ et $v = |v|e^{ib}$, où a et b sont des réels.
Si $u = 0$, on a clairement $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{ib} \begin{pmatrix} |u| \\ |v| \end{pmatrix}$, ce qui le résultat attendu. Même constat si $v = 0\square$
Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$: $|u + v|^2 = (|u| + |v|)^2 \iff u\overline{v} + \overline{u}v = 2|u||v|$ soit aussi :
$|u||v|(e^{i(a-b)} + e^{i(b-a)} - 2) = 0$ ou encore $\cos(a - b) = 1$. Autrement dit $e^{ia} = e^{ib} \overset{def}{=} \lambda$.
Et ainsi $\boxed{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} |u| \\ |v| \end{pmatrix}}$.
On a donc prouvé l'implication en vue pour $n = 2\square$
Supposons la vérifiée pour n complexes et donnons nous $z_1, ..., z_{n+1}$ pour lesquels $|z_1 + \cdots + z_{n+1}| = |z_1| + \cdots + |z_{n+1}|(1)$.
En posant $Z = \sum_{i=1}^{n} z_i$, il vient donc ((1) et inégalités triangulaires) :
$\sum_{i=1}^{n} |z_i| + |z_{n+1}|(1) \leq |Z + z_{n+1}| \leq |Z| + |z_{n+1}| \leq (\sum_{i=1}^{n} |z_i|) + |z_{n+1}|$.
Il s'ensuit que les inégalités de cet encadrement sont en fait des égalités que nous précisons :
i) $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$
ii) $|Z + z_{n+1}| = |Z| + |z_{n+1}|$
Notre hypotèse de récurrence permet d'exploiter i) en nous assurant de l'existence d'un complexe μ tel que : $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix}$.
Le cas $n = 2$ nous montre (via ii) que l'on peut trouver un complexe τ tel que $Z = \tau|Z|$ et $z_{n+1} = \tau|z_{n+1}|$.
En explicitant : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $z_i = \mu|z_i|$ et (avec i)) $\mu(\sum_{i=1}^{n} |z_i|) = \tau(\sum_{i=1}^{n} |z_i|)$.

Si tous les z_i sont nuls pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on est ramené au cas $n = 1$ qui est tautologique.

Sinon $\tau = \mu$ et on a $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_{n+1}| \end{pmatrix}$.

La récurrence se poursuit bien ■

14. Soient $x, y \in \mathbb{C}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\lambda \neq \mu$, alors on a l'implication suivante : $(Ax = \lambda x$ et ${}^tAy = \mu y) \Rightarrow {}^txy = 0$.
Solution :
Par transposition de chaque membre de la première égalité, nous obtenons : ${}^tx{}^tA = \lambda{}^tx$ puis ${}^tx{}^tAy = \lambda{}^txy$ et, avec la seconde hypothèse, $(\mu - \lambda){}^txy = 0$.
Comme $\lambda \neq \mu$, $\boxed{{}^txy = 0}$ ■

15. On suppose qu'il existe un réel positif μ et un vecteur positif non nul w tels que $Aw \geq \mu w$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel k, $A^k w \geq \mu^k w$. En déduire que $\rho(A) \geq \mu$.
   (b) Montrer que si $Aw > \mu w$, alors $\rho(A) > \mu$.
   (c) On suppose à présent que dans le système d'inégalités $Aw \geq \mu w$, la k-ième inégalité est stricte, c'est-à-dire
$$\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} w_j > \mu w_k.$$
   Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, en posant $w'_j = w_j$ si $j \neq k$ et $w'_k = w_k + \varepsilon$, on a $Aw' > \mu w'$. En déduire que $\rho(A) > \mu$.

Solution :
Pour être crédible, il faut convenir (par définition de la relation d'ordre sur les matrices et celle du produit matriciel) que : $\boxed{\text{si } M \in M_{p,q}(\mathbb{R}_+) \text{ et si } Y \in M_{q,r}(\mathbb{R}_+) \text{ alors } MY \geq 0 \ (2)}$.
Par ailleurs, et pour les mêmes raisons, si on dispose de trois matrices U, V et W de même taille telles que $U \geq V$ et $V \geq W$ alors $U \geq W$ (3).
a) Par récurrence et évident (car égalité) pour $k = 0$, en supposant l'inégalité vérifiée pour un entier k:
on a donc $A^k w - \mu^k w \geq 0$ et $A \geq 0$ soit, par (2) $A(A^k w - \mu^k w) \geq 0$ ou $A^{k+1}w - \mu^k Aw \geq 0$ et, enfin (puisque $Aw \geq$), $\mu^k Aw \geq \mu^{k+1} w$ par (3) la propriété à prouver est bien héréditaire et la récurrence est validée□
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour $i \in [\![1, n]\!]$, nous avons donc $(A^k(w))_i \geq \mu^k w_i$ et, par positivité des membres de ces inégalités $|(A^k(w))_i| \geq \mu^k |w_i|$ puis en sommant : $\boxed{\|A^k(w)\|_1 \geq \mu^k \|w\|_1}$ et, puisque $w \neq 0_{\mathbb{C}^n}$, $\boxed{\dfrac{\|A^k(w)\|_1}{\|w\|_1} \geq \mu^k}$.
Ce qui implique (par définition de la norme matricielle $\|.\|$) que : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ \|A^k\| \geq \mu^k}$ et donc que $(\|A^k\|)^{1/k} \geq \mu$.
Par conservation des inégalités à la limite et avec Q.11, il vient bien $\boxed{\rho(A) \geq \mu}$ ■
$\boxed{\text{Notons } J \text{ l'ensemble (non vide) des } i \in [\![1, n]\!] \text{ tels que } w_i > 0}$ b) Cette fois $(A(w))_i > \mu w_i$, ce pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Donc en posant $m = \min\limits_{i \in J}(\dfrac{(A(w))_i}{w_i} - \mu)$, on a d'une part $m > 0$ et, en posant $\gamma = m + \mu$, nous obtenons d'autre part $Aw \geq \gamma w$. En appliquant le a) : $\boxed{\rho(A) \geq \gamma > \mu}$ ■
c) On pose $r = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{k,j} w_j - \mu w_k$. On a $r > 0$. Soit alors $\epsilon = \dfrac{r}{\mu + 1}$.
Avec les notations de l'énoncé :
Si $i \neq k$ alors $((Aw')_i > (Aw)_i \geq \mu w_i = \mu w'_i$.
Et $(Aw')_k > (Aw)_k = r + \mu w_k \geq \mu(\epsilon + w_k) = \mu w'_k$. Le b) donne bien $\boxed{\rho(A) > \mu}$ ■

16. Soit λ une valeur propre de A de module $\rho(A)$ et soit $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A associé à λ. On définit le vecteur positif non nul v_0 par $(v_0)_i = |x_i|$ pour $1 \leq i \leq n$.

    (a) Montrer que $Av_0 \geq \rho(A)v_0$, puis que
$$Av_0 = \rho(A)v_0.$$

    (b) En déduire que $\rho(A) > 0$ et
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (v_0)_i > 0.$$

    (c) Montrer que x est colinéaire à v_0. En déduire que $\lambda = \rho(A)$.

La propriété (i) est démontrée.

Solution :

a) On a immédiatemment (inégalité triangulaire) et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(A(v_0)_i \geq |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| = |\lambda x_i|$ ou encore $(A(v_0)_i \geq \rho(A)(v_0)_i$ ce qui donne bien $\boxed{Av_0 \geq \rho(A)v_0}$□

Par l'absurde si $Av_0 \geq \rho(A)v_0$ et $Av_0 \neq \rho(A)v_0$ alors par 15.c $\rho(A) > \rho(A)$ ce qui est bien sûr intenable donc $\boxed{Av_0 = \rho(A)v_0}$■

b)Il existe un indice $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $(v_0)_i > 0$ et $(A(v_0))_i \geq a_{ii}(v_0)_i > 0$; ce qui interdit au rayon spectral de A d'être nul□

Par ailleurs et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\rho(A)(v_0)_j = (Av_0)_j \geq a_{ij}(v_0)_i > 0$ donc $\boxed{(v_0)_j > 0}$■

c) On a $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = \lambda x_1$ donc (inégalité triangulaire) $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}|x_j| \geq \rho(A)|x_1|$ autrement dit :

$\rho(A)(v_0)_1 = |\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{1j}|x_j| = \rho(A)(v_0)_1$ (par a) pour le dernier point.

On a donc $|\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{1j}|x_j|$ et par stricte positivité des coefficients de A ainsi que l'utilisation de Q13, on a bien colinéarité de x et v_0.

Evidemment de ceci on déduit $\lambda = \rho(A)$■

17. En appliquant les résultats précédents à la matrice ${}^tA$, on obtient l'existence de $w_0 \in \mathbb{R}^n$, dont toutes les composantes sont strictement positives, tel que ${}^tAw_0 = \rho(A)w_0$. On pose
$$F = \{x \in \mathbb{C}^n \mid {}^txw_0 = 0\}.$$

    (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par φ_A, et que
$$C^n = F \oplus \mathbb{C}v_0.$$

    (b) Montrer que si v est un vecteur propre de A associé à une valeur propre $\mu \neq \rho(A)$, alors $v \in F$. En déduire la propriété (iii).

Solution :

a) Le fait que F soit un sev de $\mathbb{C}^n$ provient de la linéarité $\theta : x \in \mathbb{C}^n \to^t xw_0$.

Prenons $x \in F$ alors ${}^t(\phi_A(x))w_o =^t x({}^tA(w_o)) =^t x(\rho(A)w_o) = \rho(A)({}^txw_0) = 0$.

La stabilité de F par ϕ_A en découle□

$\theta \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ et $\theta(w_0) > 0$ montre que θ est une $\boxed{\text{forme linéaire non nulle}}$ donc son noyau, à savoir F, est un $\boxed{\text{hyperplan}}$ de $\mathbb{C}^n$.

Par ailleurs $\theta(v_0) > 0$ donc la droite vectorielle engendrée par v_0 est un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}^n$■

b) Associons à μ un vecteur propre x alors par 15.c ${}^txw_0 = 0$ soit x (ou v) appartient à F□

Si maintenant w est un vecteur propre de A tel que $w \geq 0$ et de valeur propre μ.

Ou $\mu = \rho(A)$ et c'est fini□

Sinon, par ce qui précède $w \in F$ et donc ${}^tww_0 = 0$ ce qui entraîne ($w \geq 0$ et $w_0 > 0$) $w = 0$ contradictoire.

La propriété iii) en découle■

18. (a) On note ψ l'endomorphisme de F défini comme la restriction de φ_A à F. Montrer que toutes les valeurs propres de ψ sont de module strictement inférieur à $\rho(A)$. En déduire que $\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique de A et que

$$\ker(A - \rho(A)I_n) = \mathbb{C}v_0.$$

La propriété (ii) est démontrée.

(b) Montrer que si $x \in F$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{A^k x}{\rho(A)^k} = 0$.

(c) Soit x un vecteur positif non-nul. Déterminer la limite de $\dfrac{A^k x}{\rho(A)^k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

La propriété (iv) est démontrée.

Solution :

a) Supposons que x soit un vecteur propre de ψ de valeur propre de module $\rho(A)$ alors Q16 montre que $x \in Vect(v_0)$, ce qui montre que $x = 0$ ABSURDE. Donc les valeurs propres de ψ sont bien toutes de module strictement inférieur à $\rho(A)\square$

On a alors $Q = \chi_\psi$ divise $P = \chi_A$ donc, pour des raisons de degré $P = (X - a)Q$.

Mais compte-tenu de Q.16 $P(\rho(A)) = 0$ mais $Q(\rho(A)) \neq 0$ par ce qui précède et ceci montre bien les deux assertions désirées$\blacksquare$

b) Dans une base adaptée (b, v_0) à la décomposition $C^n = F \oplus \mathbb{C}v_0$, ϕ_A est représenté par une matrice diagonale par blocs $M = diag(B, \rho(A))$, où B est la matrice de ψ dans la base b. On note P la matrice de passage entre la base canonique de C^n et (b, v_0).

Si $x \in F$ alors $P^{-1}x =^t (y_1, ..., y_n)$ étant la colonne des composantes de x dans la base (b, v_0), on a $y_n = 0$ donc en posant $w = (y_1, ..., y_{n-1})$ il vient, pour tout k :

$A^k x = PM^k P^{-1}x = Pdiag(B^k, \rho(A)^k)^t(w, 0) = P(B^k(w), 0)$.

Il en résulte que $\|A^k x\|_1 = \|P(B^k(w), 0)\|_1 \leq \|P\|\|B^k(w)\|_1 \leq \|P\|\|B^k\|\|w\|_1$, tout ceci avec la partie 1.

On posera $C = \|P\|\|w\|_1$ et puisque (cf 18.a) $\rho(B) < \rho(A)$, on choisit $r \in]\rho(B), \rho(A)[$.

Dès lors $0 \leq \dfrac{\|A^k x\|_1}{\rho(A)^k} \leq C\dfrac{\|B^k\|}{r^k}(\dfrac{r}{\rho(A)})^k$.

Avec Q.13, on dispose de l'information $\|B^k\|^{1/k} \leq r$ APCR, cela implique au vu de l'encadrement précédent que : $\boxed{\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{A^k x}{\rho(A)^k} = 0}$ $\blacksquare$

c) On écrit $x = y + av_0$, où $y \in F$ et $a \in \mathbb{R}$. Le caractère positif non nul de x conduit à ${}^t x w_0 > 0 \iff a > 0$.

Puis, pour tout entier naturel k, $\dfrac{A^k x}{\rho(A)^k} = \dfrac{A^k y}{\rho(A)^k} + av_0$, avec le b), on obtient bien et enfin ce que l'on veut $\boxed{\text{FIN}}$