

Feuille d'exercices 5

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

$$(d) \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2 \underset{X=x^{\frac{1}{6}}}{\Leftrightarrow} X^3 + X^2 = 2 \underset{X=1 \text{ solution évidente}}{\Leftrightarrow} (X-1)(X^2+2X+2) = 0 \underset{\Delta < 0}{\Leftrightarrow} X = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Exercice 3.

(a)

$$\begin{aligned} \begin{cases} 8^x &= 10y \\ 2^x &= 5y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-1)\ln 2 &= \ln 5 + \ln y \\ x \ln 2 &= \ln 5 + \ln y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-1) &= x \\ \ln y &= x \ln 2 - \ln 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{2} \\ y &= e^{\frac{\ln 2}{2} - \ln 5} = \frac{\sqrt{2}}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y &= 7 \\ \ln x + \ln y &= 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= 7 \\ xy &= e \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \underset{X=x \text{ ou } y}{X^2 - 7X + e = 0} \\ &\Leftrightarrow x, y = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4e}}{2} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \begin{cases} xy &= a^2 \\ \ln^2 x + \ln^2 y &= \frac{5}{2} \ln^2 a \end{cases} &\underset{X=\ln x, Y=\ln y, A=\ln a}{\Leftrightarrow} \begin{cases} X+Y &= 2A \\ X^2+Y^2 &= \frac{5}{2}A^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X+Y &= 2A \\ 2XY &= (X+Y)^2 - (X^2+Y^2) = \frac{3}{2}A^2 \end{cases} \\ &\underset{Z=X \text{ ou } Y}{\Leftrightarrow} 4Z^2 - 8AZ + 3A^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow Z = \frac{A}{2} \text{ ou } \frac{3A}{2} \\ &\Leftrightarrow x, y = a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Exercice 5.

(a) $x^a e^{-bx} = e^{a \ln x - bx}$.

Or $a \ln x - bx \xrightarrow{x \rightarrow 0, +\infty} -\infty$, donc $x^a e^{-bx} \xrightarrow{x \rightarrow 0, +\infty} 0$.

(b) $(\ln x)^a e^{-bx} = e^{a \ln(\ln x) - bx}$.

Or $a \ln(\ln x) - bx \xrightarrow{x \rightarrow 1, +\infty} -\infty$, donc $(\ln x)^a e^{-bx} \xrightarrow{x \rightarrow 1, +\infty} 0$.

(c) $e^{ax} x^{-b} (\ln x)^{-c} = e^{ax - b \ln x - c \ln(\ln x)}$.

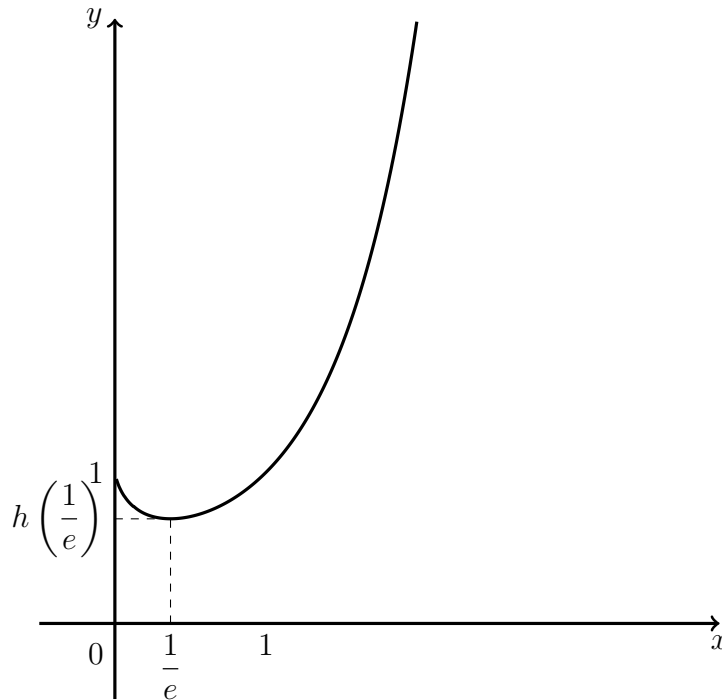
Or $ax - b \ln x - c \ln(\ln x) \xrightarrow{x \rightarrow 1, +\infty} +\infty$, donc $e^{ax} x^{-b} (\ln x)^{-c} \xrightarrow{x \rightarrow 1, +\infty} +\infty$.

Exercice 6.

(c) Par définition : $h(x) = e^{x \ln(x)}$. Donc $D_h = D'_h = \mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h'(x) = (1 + \ln(x)) x^x,$$

donc $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$. Donc h est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ et strictement croissante sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

**Exercice 7.**

(c) $\frac{a^{b^x}}{b^{a^x}} = \exp(b^x \ln(a) - a^x \ln(b)) = \exp\left(b^x \left(\ln(a) - \left(\frac{a}{b}\right)^x \ln(b)\right)\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 8.

(a) Soit $x \in [-1, 1]$. Comme $\sin \circ \arcsin = \text{Id}_{[-1, 1]}$, $\sin(\arcsin x) = x$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\arcsin \circ \sin = \text{Id}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$. Soit $x' \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x' = \sin x$ (on a $x' = x + 2k\pi$ ou $x' = \pi - x + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$). Alors :

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin x') = x'.$$

(c) Soit $x \in]-1, 1[$. On a : $\tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\sin = \tan \cos$, donc $\sin(\arctan x) = x \cos(\arctan x)$, où $\cos^2 = \frac{1}{1 + \tan^2}$, donc $\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2}$; or, comme $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\arctan x) \geq 0$, donc $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; et finalement : $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Exercice 9.

(c)

$$\begin{aligned}
\sin 2x + \sin x = 0 &\Leftrightarrow 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 0 \bmod \pi \text{ ou } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \bmod \pi \\
&\Leftrightarrow x = 0 \bmod \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \pi \bmod 2\pi.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\sin 2x + \sin \left(\frac{\pi}{3} + 3x \right) = 0 &\Leftrightarrow 2 \sin \left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{5}{2}x + \frac{\pi}{6} = 0 \bmod \pi \text{ ou } \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \bmod \pi \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{15} \bmod \frac{2\pi}{5} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi.
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\cos 3x + \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right) + \sin x = 0 \\
&\Leftrightarrow 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = 0 \bmod \pi \text{ ou } \frac{\pi}{4} - 2x = \frac{\pi}{2} \bmod \pi \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \bmod \pi \text{ ou } -\frac{\pi}{8} \bmod \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\cos x - \cos 2x = \sin 3x &\Leftrightarrow 2 \sin \left(\frac{3x}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{3x}{2} \right) \cos \left(\frac{3x}{2} \right) \\
&\Leftrightarrow \sin \left(\frac{3x}{2} \right) = 0 \text{ ou } \sin \left(\frac{x}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2} \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 0 \bmod \pi \text{ ou } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \pm \frac{3x}{2} \bmod 2\pi \\
&\Leftrightarrow x = 0 \bmod \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} \bmod \pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} \bmod 2\pi.
\end{aligned}$$

(g) $\cos x + \sin x = 2 \Leftrightarrow \cos x = \sin x = 1$, impossible.

(h)

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \\
&\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{3} \bmod 2\pi \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{6} \bmod 2\pi.
\end{aligned}$$

Exercice 10.(f) Comme $\tan^2 = \frac{1}{\cos^2} - 1$, on a : $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, $\tan^2(\arccos x) = \frac{1}{x^2} - 1$.Or : $\forall x \in]0, 1[$, $\arccos x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, donc $\tan(\arccos x) > 0$. Donc : $\forall x \in]0, 1[$, $\tan(\arccos x) =$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}.$$

$$\text{De même : } \forall x \in]-1, 0[, \tan(\arccos x) = -\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}.$$

Exercice 11.

- (a) Comme $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $0 < \arcsin \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$; et de même, $0 < \arcsin \frac{1}{5} < \frac{\pi}{4}$, donc : $0 < \arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{5} < \frac{\pi}{2}$. Donc :

$$\arcsin x = \arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \sin \left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{1}{5^2}} + \frac{1}{5} \sqrt{1 - \frac{1}{3^2}} = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{3} + 1}{15}.$$

- (b) Comme $3 > 1$, $\arctan 3 > \frac{\pi}{4}$. De même, $\arctan 4 > \frac{\pi}{4}$, donc $\arctan 3 + \arctan 4 > \frac{\pi}{2}$. Il est donc impossible que $\arctan x = \arctan 3 + \arctan 4$.

Exercice 13.

- (c) L'équation (E) est définie lorsque $2x \in [-1, 1]$, donc $D = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Soit $x \in D$: $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ et $\arcsin x \sqrt{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, donc $\arcsin x + \arcsin x \sqrt{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow 2x = \sin \left(\arcsin x + \arcsin x \sqrt{3} \right) = x \sqrt{1 - 3x^2} + x \sqrt{3 - 3x^2} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2 = x \sqrt{1 - 3x^2} + \sqrt{3 - 3x^2} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \pm \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- (d) Soit $x \in D = [-1, 1]$.

Si $x \in [-1, 0[$: $\frac{\arcsin x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$, or $\arccos x \in [0, \pi]$, donc il n'y a pas de solution.

Si $x \in [0, 1]$: $\frac{\arcsin x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, donc :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow x = \cos \left(\frac{\arcsin x}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \arcsin x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{2}} \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

- (e) Soit $x \in D = [-1, 1]$. $\arctan 2x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow x = \sin(\arctan 2x) = \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}} \quad (\text{cf exercice 8}) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{1 + 4x^2} = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

- (f) Soit $x \in D = \mathbb{R}$.

Si $x < 0$: $\arctan x < 0$, donc $\frac{\pi}{2} - \arctan x > \frac{\pi}{2}$, or $\arctan 3x < \frac{\pi}{2}$, donc il n'y a pas de solution.

Si $x \geq 0$: $\frac{\pi}{2} - \arctan x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc :

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Leftrightarrow 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{1}{\tan \arctan x} = \frac{1}{x} \\&\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \\&\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Exercice 15.

(d)

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} 2x = \operatorname{ch} x &\Leftrightarrow 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} x \\&\Leftrightarrow \operatorname{sh} x = \frac{1}{2} \quad \text{car } \operatorname{ch} x \neq 0 \\&\Leftrightarrow_{X=e^x} X^2 - X - 1 = 0 \\&\Leftrightarrow e^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\&\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}16 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 15 &\Leftrightarrow \operatorname{sh} 2x = \frac{15}{8} \\&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \operatorname{argsh} \frac{15}{8} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{15}{8} + \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 + 1} \right) = \ln 2.\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x + \frac{2}{\operatorname{sh} x} = 3 &\Leftrightarrow \operatorname{sh}^2 x - 3\operatorname{sh} x + 2 = 0 \\&\Leftrightarrow \operatorname{sh} x = 1 \text{ ou } 2 \\&\Leftrightarrow x = \ln(1 + \sqrt{2}) \text{ ou } \ln(2 + \sqrt{5}).\end{aligned}$$

Exercice 16.

$$\begin{aligned}\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y &= a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y &= b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x + e^y &= a + b \\ e^{-x} + e^{-y} &= a - b \end{cases} \\&\Leftrightarrow_{X=e^x, Y=e^y} \begin{cases} X + Y &= a + b \\ XY &= \frac{X+Y}{\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}} = \frac{a+b}{a-b} \end{cases} \\&\Leftrightarrow_{Z=X \text{ ou } Y} (a-b)Z^2 - (a^2 - b^2)Z + (a+b) = 0 \\&\Leftrightarrow X, Y = \frac{a+b}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{a^2 - b^2}} \right) \text{ si } a^2 - b^2 \geq 4 \text{ ou } \leq 0 \\&\Leftrightarrow x, y = \ln \left(\frac{a+b}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{a^2 - b^2}} \right) \right) \text{ si } a^2 - b^2 \geq 4 \text{ ou } \leq 0.\end{aligned}$$

Exercice 17.

(a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kx) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{kx} + e^{-kx}) \\ &= \frac{1}{2} ((1 + e^x)^n + (1 + e^{-x})^n) \\ &= 2^n \operatorname{ch} \left(\frac{nx}{2} \right) \operatorname{ch}^n \left(\frac{x}{2} \right)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{sh}(kx) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{kx} - e^{-kx}) \\ &= \frac{1}{2} ((1 + e^x)^n - (1 + e^{-x})^n) \\ &= 2^n \operatorname{sh} \left(\frac{nx}{2} \right) \operatorname{ch}^n \left(\frac{x}{2} \right)\end{aligned}$$