Devoir surveillé n° 2

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les résultats doivent être encadrés.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(8 points)* On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
   Dans la suite de l'exercice, on prend $\mathbb{R}_+^*$ comme ensemble de départ de f.
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de départ, et calculer sa dérivée.
3. Quelles sont les variations de f ? Dresser le tableau de variations de f avec les limites.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un intervalle J à déterminer.
5. Déterminer sa bijection réciproque.
6. Tracer, dans un même repère, la courbe de f et celle de sa réciproque.

Exercice 2. *(8 points)*

1. Soient k, n deux entiers naturels tels que $k \leq n$. On pose : $\mu(k,n) = \displaystyle\sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{q}\binom{n-q}{k}$.

   (a) Montrer que : $\forall q \in [\![0, n-k]\!],\ \dbinom{n}{q}\dbinom{n-q}{k} = \dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{q}$.

   (b) En déduire que : $\mu(k,n) = 0$ si $k < n$, et $\mu(k,n) = 1$ si $k = n$.

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On définit alors la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$.

   Déduire de la question précédente la *formule d'inversion de Pascal* : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} b_p$.

3. On pose dans cette question :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = n a_{n-1} + (-1)^n.$$

   (a) Calculer $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_5$ puis $b_0,\ b_1, \ldots,\ b_5$.

   (b) Conjecturer une expression générale de b_n.

   (c) *(Hors barême)* Démontrer cette conjecture.

   (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Exercice 3. *(8 points)* Soit $z = a + ib$ un nombre complexe de module 1. On note $f(z) = \left|1 - z + \frac{z^2}{2}\right|$.

1. Calculer $f(z)$ lorsque $z = i$, puis lorsque $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Montrer que : $0 \leq f(z) \leq \frac{5}{2}$.
3. Déterminer $\mathrm{Re}(z^2)$ en fonction de a uniquement.
4. En déduire que $f(z)^2 = g(a)$, où $g : x \mapsto 2x^2 - 3x + \frac{5}{4}$.
5. Étudier la fonction g. En déduire son maximum et son minimum sur l'intervalle $[-1, 1]$.
6. En déduire un encadrement de $f(z)$ meilleur que celui de la question 2.
   Les bornes de ce nouvel encadrement peuvent-elles être atteintes ?

Problème. *(12 points)* On considère la fonction h et la suite (u_n) respectivement définies par :

$$h : x \mapsto \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}.$$

On note $\alpha = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

I. 1. Déterminer le domaine de définition de h. La fonction h est-elle continue ? dérivable ?
   2. Dresser le tableau de variations de h avec les limites.
   3. Tracer la courbe de h.
   4. Justifier que $h([\alpha, +\infty[) \subset [\alpha, +\infty[$.

II. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq \alpha$.
   2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   3. Justifier que la suite (u_n) converge vers α.

III. 1. Montrer que : $\forall x > 0,\ h(x) - \alpha = \frac{2x + \alpha}{3x^2}(x - \alpha)^2$.
   2. Montrer que : $\forall x \geq \alpha,\ \frac{2x + \alpha}{3x^2} \leq \frac{1}{\alpha}$.
   3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{\alpha}(u_n - \alpha)^2$.
   4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{\alpha^{2^n - 1}}$.
   5. Déterminer N minimal tel que u_n soit égal à α à 10^{-6} près.