Devoir surveillé n° 2
CORRIGÉ

Exercice 1.

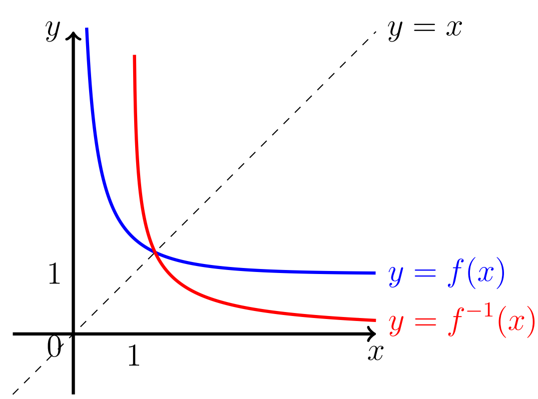
1. Pour $x \in \mathbb{R}$, le nombre $f(x)$ est défini lorsque $e^x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 0$. Donc $D_f = \mathbb{R}^*$.
2. La fonction f est le quotient de $x \mapsto e^x$ par $x \mapsto e^x - 1$, qui sont usuellement dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{e^x(e^x-1) - e^x e^x}{(e^x-1)^2} = -\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$.
3. D'après la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-e^{-x}} = 1$, d'où le tableau :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1

4. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc d'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $J = f(\mathbb{R}_+^*) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)[=]1, +\infty[$.
5. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in]1, +\infty[$. On a :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x}{e^x - 1} \Leftrightarrow ye^x - y = e^x \Leftrightarrow (y-1)e^x = y \Leftrightarrow e^x = \frac{y}{y-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{y-1}\right),$$

   donc la réciproque de f est la fonction $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \end{array} \right.$.
6.



Exercice 2.

1. (a) Soit $q \in [\![0, n-k]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{q}\binom{n-q}{k} &= \frac{n!}{q!(n-q)!}\frac{(n-q)!}{k!(n-q-k)!} \\
&= \frac{n!}{q!k!(n-q-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{q!(n-q-k)!} \\
&= \binom{n}{k}\binom{n-k}{q}.
\end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\mu(k,n) &= \sum_{q=0}^{n-k}(-1)^q\binom{n}{k}\binom{n-k}{q} \\
&= \binom{n}{k}\sum_{q=0}^{n-k}(-1)^q\binom{n-k}{q} \\
&= \binom{n}{k}(1-1)^{n-k} \quad \text{d'après la formule du binôme,}
\end{aligned}$$

donc $\mu(k,n) = 0$ si $k < n$, et $\mu(n,n) = \binom{n}{n} \times 1 = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}b_p &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a_k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\binom{p}{k}a_k \quad \text{par interversion de sommes} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-k}(-1)^q\binom{n}{q}\binom{n-q}{k}a_k \quad \text{en posant } q = n-p \\
&= \sum_{k=0}^{n}\mu(k,n)a_k \\
&= a_n \quad \text{d'après la question 1.}
\end{aligned}$$

3. (a) Par un calcul direct : $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 9$, $a_5 = 44$, puis $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 6$, $b_4 = 24$, $b_5 = 120$.

   (b) D'après les premières valeurs de la suite, on conjecture que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = n!$.

   (c) On procède par récurrence : $b_0 = 1 = 0!$, donc l'assertion est initialisée.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $b_n = n!$. Alors :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(k a_{k-1} + (-1)^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1) \binom{n+1}{k+1} a_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (n+1) \binom{n}{k} a_k + 0 \\
&= (n+1) b_n \\
&= (n+1)! \quad \text{par hypothèse de récurrence,}
\end{aligned}$$

   donc l'assertion est héréditaire. Par récurrence, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = n!$.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise la formule d'inversion :

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} b_p \\
&= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} p! \\
&= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \frac{n!}{(n-p)!} \\
&= n! \sum_{q=0}^{n} \frac{(-1)^q}{q!} \quad \text{en posant } q = n - p.
\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. On a :
   - $f(i) = \left|1 - i + \frac{i^2}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} - i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$,
   - $f\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}$.
2. Par définition du module, on a : $|f(z)| \geq 0$.

   Par inégalité triangulaire, on a ensuite : $|f(z)| \leq 1 + |z| + \frac{|z|^2}{2} = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.
3. On a : $\mathrm{Re}(z^2) = a^2 - b^2$. Or, comme $|z| = 1$, $a^2 + b^2 = 1$. Donc : $\mathrm{Re}(z^2) = 2a^2 - 1$.
4. On a : $1 - z + \frac{z^2}{2} = \left(1 - a + \frac{2a^2 - 1}{2}\right) + i(-b + ab)$, donc :

$$\begin{aligned} f(z)^2 &= \left(1 - a + \frac{2a^2 - 1}{2}\right)^2 + (-b + ab)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - a + a^2\right)^2 + (1 - a^2)(1 - a)^2 \\ &= 2a^2 - 3a + \frac{5}{4} \\ &= g(a). \end{aligned}$$

5. La fonction g est polynomiale, donc usuellement définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 4x - 3$, donc g est décroissante sur $\left]-\infty, \frac{3}{4}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

   De plus $g(-1) = 2 + 3 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$, $g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8}$ et $g(1) = \frac{1}{4}$. Donc, sur $[-1, 1]$, g admet un minimum égal à $\frac{1}{8}$, atteint en $\frac{3}{4}$; et g admet un maximum égal à $\frac{25}{4}$, atteint en $x = -1$.
6. D'après la question précédente : $\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq f(z) \leq \frac{5}{2}$. Le maximum $\frac{5}{2}$ est atteint en $z = -1$, et le minimum $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ est atteint en z de module 1 tel que $\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{4}$, c'est-à-dire $z = \frac{3}{4} \pm i\frac{\sqrt{7}}{4}$.

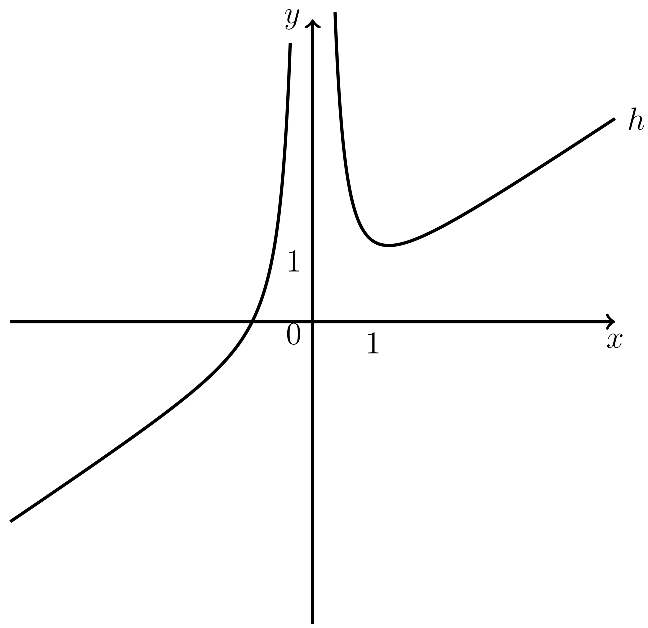
Problème.

I. 1. La fonction h est définie lorsque $x \neq 0$, c'est-à-dire sur $D_h = \mathbb{R}^*$. Comme somme de fonctions usuellement dérivables, elle est dérivable, donc continue, en tout point de D_h.

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{3x^3}$, donc $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^3} \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \alpha$ ou $x < 0$.
D'où le tableau :

x	$-\infty$		0_-	0_+		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$			$-$		$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	α	$\nearrow$	$+\infty$

3.



4. Soit $x \in [\alpha, +\infty[$. Alors, d'après le tableau de variations, $h(x) \geq \alpha$, donc $h(x) \in [\alpha, +\infty[$. Donc $h([\alpha, +\infty[) \subset [\alpha, +\infty[$.

II. 1. On sait que u_0 existe et $u_0 = 2 \geq \alpha$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n existe et $u_n \geq \alpha$. Alors $u_n \in D_h$, donc $u_{n+1} = h(u_n)$ existe, et d'après I.4., $u_{n+1} \geq \alpha$. Donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq \alpha$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} - u_n = h(u_n) - u_n = \dfrac{2}{3u_n^2} - \dfrac{u_n}{3} = \dfrac{2 - u_n^3}{3u_n^2} \leq 0$ car $u_n \geq \alpha$. Donc (u_n) est décroissante.

3. Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée par α, elle est convergente. Sa limite l vérifie alors $l = h(l) = \dfrac{2}{3}\left(l + \dfrac{1}{l^2}\right)$, donc $\dfrac{l}{3} = \dfrac{2}{3l^2}$, donc $l^3 = 2$, donc $l = \alpha$.

III. 1. Soit $x > 0$. On a :
$$\frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{(2x+\alpha)(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)}{3x^2} = \frac{2x^3 - 3\alpha x^2 + \alpha^3}{3x^2} = \frac{2}{3}x - \alpha + \frac{2}{3x^2} = h(x) - \alpha.$$

2. Soit $x \geq \alpha$. Alors $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\alpha}$, donc $\dfrac{2x+\alpha}{3x^2} = \dfrac{2}{3x} + \dfrac{\alpha}{3x^2} \leq \dfrac{2}{3\alpha} + \dfrac{\alpha}{3\alpha^2} = \dfrac{1}{\alpha}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après II.1., $0 \leq u_{n+1} - \alpha$, et la formule de la question 1. appliquée à $x = u_n > 0$ s'écrit : $u_{n+1} - \alpha = h(u_n) - \alpha = \dfrac{2u_n + \alpha}{3u_n^2}(u_n - \alpha)^2 \leq \dfrac{1}{\alpha}(u_n - \alpha)^2$ d'après 2.

4. Comme $u_0 - \alpha = 2 - \sqrt[3]{2} \in [0, 1]$, l'inégalité voulue est vraie pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons-la vraie au rang n. Alors :

$$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{\alpha}(u_n - \alpha)^2 \leq \frac{1}{\alpha \left(\alpha^{2^n - 1}\right)^2} = \frac{1}{\alpha^{2^{n+1} - 2 + 1}} = \frac{1}{\alpha^{2^{n+1} - 1}},$$

donc l'inégalité est vraie au rang $n + 1$. Donc par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. D'après la question précédente : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$ si $\dfrac{1}{\alpha^{2^n - 1}} \leq 10^{-6}$. Or :

$$\frac{1}{\alpha^{2^n - 1}} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow \alpha^{2^n - 1} \geq 10^6 \Leftrightarrow 2^n - 1 \geq \log_\alpha(10^6) \Leftrightarrow n \geq \log_2 \left(\log_\alpha(10^6) + 1\right) \simeq 5,93.$$

Donc $N = \lceil \log_2 \left(\log_\alpha(10^6) + 1\right) \rceil = 6$ convient.