Devoir à la maison n° 3

Exercice 1. On note $\mathbb{U}_5$ l'ensemble des racines cinquièmes de 1 dans $\mathbb{C}$.

1. Décrire explicitement $\mathbb{U}_5$. Montrer que la somme de ses éléments est nulle.
2. En déduire l'égalité : $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.
3. Rappeler la formule donnant, pour tout x réel, $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.
4. Déduire des questions précédentes que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution d'une équation algébrique de degré 2.

   La résoudre et montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
5. Déduire des questions précédentes la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 2. On considère le plan usuel muni d'un repère orthonormé, d'origine O. On note $\mathcal{C}$ le cercle unité, de centre O et de rayon 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\theta_n = \frac{2\pi}{2^{n+2}}$ et Π_n le polygone de sommets les points d'affixe $e^{ik\theta_n}$ avec $k \in [\![0, 2^{n+2}-1]\!]$.

1. Représenter sur une même figure $\mathcal{C}$, Π_0 et Π_1.
2. Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et soient A, B et C les points d'affixes respectives 1, $e^{i\theta}$ et $e^{2i\theta}$.
   (a) Déterminer l'aire $\mathcal{A}_{OAC}$ du triangle OAC en fonction de θ.
   (b) En déduire l'égalité : $\mathcal{A}_{OAC} = 2\cos(\theta)\mathcal{A}_{OAB}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit B_n le point d'affixe $e^{i\theta_n}$. Exprimer l'aire $\mathcal{A}_n$ du polygone Π_n en fonction de l'aire du triangle OAB_n.
4. Déduire des résultats précédents l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{A}_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\mathcal{A}_{n+1}$.
5. On admet que la suite $(\mathcal{A}_n)$ tend vers l'aire du disque unité. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$.