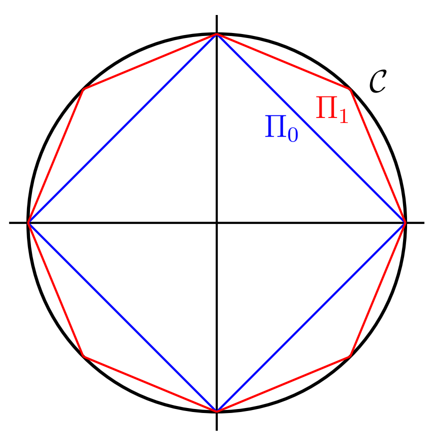
Devoir à la maison n° 3
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Cf. le cours.
2. Notons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, on sait que : $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$, donc en prenant la partie réelle de cette égalité :
$$1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=0,$$
d'où, comme $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi-\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, et de même $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, l'égalité voulue.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = 2\cos^2(x)-1$.
4. Notons $t = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Alors, d'après la question 3., $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2t^2-1$, donc d'après la question 2. : $1+2t+2(2t^2-1)=0$, donc $4t^2+2t-1=0$. Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 20$, donc ses solutions sont $t_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{20}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$.
Or $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$. Donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
5. D'après la question 3. : $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos^2(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)$. Donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{8}$. Comme $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$, on a donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{8}}$.

Exercice 2.

1.



2. (a) Le triangle OAC est isocèle en O, d'angle principal 2θ et de côtés principaux égaux à 1. La hauteur issue de A a donc pour longueur $\cos\theta$ et la base correspondante a pour longueur $2\sin\theta$, donc $\mathcal{A}_{OAC} = \sin\theta\cos\theta$.
   (b) Dans le triangle OAB, la hauteur issue de B a pour longueur $\sin\theta$ et la base correspondante a pour longueur 1, donc $\mathcal{A}_{OAB} = \dfrac{\sin\theta}{2}$, d'où la formule voulue.
3. Par construction, $\mathcal{A}_n = 2^{n+2}\mathcal{A}_{OAB_n}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a d'après le résultat précédent : $\mathcal{A}_n = 2^{n+2}\mathcal{A}_{OAB_n}$.
   Or $\theta_n = 2\theta_{n+1}$, donc, d'après le résultat de la question 2., $\mathcal{A}_{OAB_n} = 2\cos(\theta_{n+1})\mathcal{A}_{OAB_{n+1}}$, d'où :
$$\mathcal{A}_n = 2^{n+3}\cos(\theta_{n+1})\mathcal{A}_{OAB_{n+1}} = \cos(\theta_{n+1})\mathcal{A}_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\mathcal{A}_{n+1}.$$
5. Par récurrence, le résultat précédent donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{A}_0 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\mathcal{A}_{n+1}$.
   Or Π_0 est un carré de côté $\sqrt{2}$, donc $\mathcal{A}_0 = 2$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathcal{A}_{n+1} = \pi$, donc :
$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) = \frac{2}{\pi}.$$