TD 11 : Intégrales généralisées

Exercice ($\star$) 1 *(Fonction Gamma)*
Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ *converge si et seulement si* $x > 0$.

Exercice ($\star\star$) 1 *(Grand Classique)*
En revenant à la défintion montrer que l'intégrale généralisée $\int_2^{\infty} \ln(1-\frac{1}{t^2})dt$ *converge et déterminer sa valeur.*
Démontrer d'une autre façon la convergence.

Exercice ($\star\star$) 2 *(Idem)*
Nature de $\int_0^{\infty} \ln(thx)dx$ *?*

Exercice ($\star\star\star$) 1 *(Intégration des relations de comparaison)*
Pour une série $\sum u_n$ *de nombres réels, on note* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de ses sommes partielles.*
Si de plus $\sum u_n$ *est convergente, on note* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de ses restes* [a]
Soient a *un réel et* $b > a$ *(*b *pouvant être égal à* $+\infty$*) ainsi que* f, g *continues par morceaux sur* $[a, b[= I$ *et à valeurs strictement positives.*
1) On suppose que $\int_I g$ *converge et on pose, pour* $x \in I$, $R(x) = \int_x^b f(t)dt$ *et* $T(x) = \int_x^b g(t)dt$.
Etablir que :
i) $f(x) = \underset{x\to b}{o}(g(x)) \Longrightarrow R(x) = \underset{x\to b}{o}(T(x))$.
ii) $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x) \Longrightarrow R(x) \underset{x\to b}{\sim} T(x)$.
2) On suppose cette fois que $\int_I g$ *diverge et on pose, pour* $x \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *et* $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.
Etablir que :
i) $f(x) = \underset{x\to b}{o}(g(x)) \Longrightarrow F(x) = \underset{x\to b}{o}(G(x))$.
Montrer à l'aide d'exemples que l'on ne peut, en général, rien dire de la nature de $\int_I f$.
ii) $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x) \Longrightarrow F(x) \underset{x\to b}{\sim} G(x)$.
Que dire de la nature de $\int_I f$ *?*
3) Déterminer un équivalent si $x \to 0^+$ *de* $\int_x^1 \frac{e^t}{\arcsin(t)}dt$.
En déduire un équivalent simple en 0^+ *de* $\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\arcsin(t)}dt$.
4)i) A l'aide d'une intégration par parties, montrer qu'en $+\infty$ *on a :*
$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \sim \frac{x}{\ln(x)}$.
ii) Etablir plus généralement et pour $n \in \mathbb{N}$ *et toujours en* $+\infty$ *que :*
$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} + o(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)})$.
5) Justifier le développement asymptotique suivant en $+\infty$ *:* $\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}dt = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o(\frac{e^x}{x^3})$.

[a] Ces notations bien classiques au demeurant ne serviront que pour la suite de cet exercice (cf TD 12 dernier exo).

Solution : 1) L'existence de T provient de la convergence supposée de $\displaystyle\int_I g$; par ailleurs par comparaison $\displaystyle\int_I f$ converge, ce qui justifie l'existence de R.

i) $\boxed{\text{Soit } \epsilon > 0. \text{ En traduisant l'hypothèse, il existe } A \in [a, b[\text{ tel que } 0 < f(x) \leq \epsilon g(x) \text{ pour } x \in [A, b[\ (1)}$.
Donc, pour $x \in [A, b[$, $0 \leq R(x) \leq \epsilon T(x)$, ce par croissance des intégrales généralisées convergentes. Ce qui montre bien que $R(x) = \underset{x \to b}{o}(T(x))$■

ii)Soit $\epsilon > 0$.

$\boxed{\text{En traduisant l'hypothèse, il existe } A \in [a, b[\text{ tel que } (1-\epsilon)g(x) < f(x) \leq (1+\epsilon)g(x) \text{ pour } x \in [A, b[\ (2)}$.
Par le même argument qu'en i), on déduit que , pour $x \in [A, b[$, $(1-\epsilon)T(x) < R(x) \leq (1+\epsilon)T(x)$; ce qui montre l'équivalence en b de $R(x)$ et $T(x)$■

2)i) On conserve l'hypothèse (1) associée à ϵ et on doit observer que $G(x) \underset{x \to b}{\to} +\infty$.
Dès lors on peut choisir $B \in]A, b[$ pour que $G(x) \leq \epsilon F(A)$ si $x \in [B, b[$ (3) et, pour de tels x :
$0 \leq \dfrac{F(x)}{G(x)} = \dfrac{F(A)}{G(x)} + \dfrac{\int_A^x f}{G(x)}$ (Chasles) puis, par (3)
$0 \leq \dfrac{F(x)}{G(x)} = \epsilon + \dfrac{\int_A^x f}{G(x)}$ mais avec (1) il vient aussi
$0 \leq \dfrac{F(x)}{G(x)} = \epsilon + \dfrac{\epsilon \int_A^x g}{G(x)} \leq \epsilon + \dfrac{\epsilon \int_a^x g}{G(X)} = 2\epsilon$.
Ce qui montre bien que $\dfrac{F(x)}{G(x)} \to 0$ si $x \to b$■

En effet la nature de $\displaystyle\int_I f$ ne peut être déduite, en général, de celle de $\displaystyle\int_I g$.
$\alpha)$: $I = [1, +\infty[$, $g(x) = 1/x$ et $f(x) = 1/x^2$ pour $x \in I$. Les deux IG sont de natures différentes.
$\beta)$: $I = [1, +\infty[$, $g(x) = 1/\sqrt{x}$ et $f(x) = 1/x$ pour $x \in I$. Les deux IG divergent■

ii) On part de (2) à laquelle on associe (3). Un démarche similaire à la précédente conduit alors à (pour $x \in [B, b[$):
$1 - \epsilon + \dfrac{\int_A^x f}{G(x)} \leq \dfrac{F(x)}{G(x)} \leq 1 + \epsilon + \dfrac{\int_A^x f}{G(x)}$ soit a fortiori
$1 - \epsilon \leq \dfrac{F(x)}{G(x)} \leq 1 + \epsilon$ ou $\dfrac{F(x)}{G(x)} \to 1$ si $x \to b$ donc $\boxed{F(x) \underset{x \to b}{\sim} G(x)}$■

Par comparaison $\displaystyle\int_I f$ diverge■

3) Pour $x \to 0$: $\dfrac{e^t}{\arcsin(t)} \sim \dfrac{1}{t}$.

Les fonctions $f : t \in I =]0, 1] \to \dfrac{e^t}{\arcsin(t)}$ et $g : t \in I \to \dfrac{1}{t}$ sont continues et strictement positives sur I.

L'intégrale généralisée (Riemann en 0) $\displaystyle\int_I g$ diverge.

Par 2)ii) (adapté en effectuant le changement de variable $t = 1 - u$) il vient $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{\arcsin(t)} dt \underset{x \to 0}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x)$ soit $\boxed{\displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{\arcsin(t)} dt \underset{x \to 0}{\sim} -\ln(x)}$□

En ce qui concerne le second point et en posant $H(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{\arcsin(t)} dt$, on peut déduire de l'équivalent précédent : $H(x) = -\ln(x) + o(\ln(x))$ pour $x \to 0$.

Il en résulte que $\displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\arcsin(t)} dt = H(x^3) - H(x^2) = -3\ln(x) + 2\ln(x) + o(\ln(x))$ soit $\boxed{\displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\arcsin(t)} dt \underset{x \to 0}{\sim} -\ln(x)}$■

4)i) Les fonctions id et $\dfrac{1}{\ln}$ étant C^1 sur le segment $[2, x]$, ce pour tout $x \geq 2$, l'IPP suivante est légitimée :
$\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \left[\frac{t}{\ln(t)}\right]_2^x + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2(t)} = \frac{x}{\ln(x)} + o(\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)})$ si $x \to +\infty$, en utilisant 2)i)($\dfrac{1}{\ln^2}$ continue, strictement positive et non intégrable (domine la fonction inverse à l'infini) sur $[2, +\infty[$; ce qui donne l'équivalent souhaité■

ii) Soumettons l'hypothèse de récurrence (H_n) pour tout $n \geq 1$:
$\exists A_n \in \mathbb{R}, \forall x \geq 2, \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = A_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!x}{\ln^k(x)} + \int_2^x \frac{n!}{\ln^{n+1}(t)} dt.$

Nous avons validé (H_1) ci-dessus.
En supposant (H_n) établie à un rang n ($x \geq 2$ fixé) et en procédant à une IPP similaire à celle effectuée en 4)i) dans $\int_2^x \frac{n!}{\ln^{n+1}(t)} dt$, il vient:
$\int_2^x \frac{n!}{\ln^{n+1}(x)} dx = \frac{n!x}{\ln^{n+1}(x)} - \frac{2n!}{\ln^{n+1}(2)} + \int_2^x \frac{(n+1)!}{\ln^{n+2}(x)} dx$. De là on récupère sans peine H_{n+1}. La récurrence se poursuit et prouve H_n pour tout n.
Posons, pour tout entier naturel k et tout $t \geq 2$, $f_k(t) = \frac{k!}{\ln^{k+1}(t)}$. Il s'agit de fonctions continues, strictement positives et non intégrables sur $[2, +\infty[$. Dans ce contexte et pour x dans cet intervalle, nous poserons $G_k(x) = \int_2^x f_k$.
Fixons $n \in \mathbb{N}$, l'IPP précédente peut s'écrire on a $G_n(x) = \frac{(n+1)!x}{\ln^{n+2}(x)} - \frac{2(n+1)!}{\ln^{n+2}(2)} + G_{n+1}(x)(*)$, ce pour tout $x \geq 2$.
On observe alors que $f_{n+1}(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(f_n(x))$ donc (son emploi est légitimé par le préambule) par 2)i) $G_{n+1}(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(G_n(x))$.
Ainsi $(*)$ donne $G_n(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{n!x}{\ln^{n+1}(x)}$ ou encore $G_n(x) = \frac{n!x}{\ln^{n+1}(x)} + \underset{x \to +\infty}{o}(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)})$, ce qui injecté dans (H_n) conduit au résultat■
5) Même philosophie donc en sténo. On pose, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 1$: $f_n(t) = \frac{e^t}{t^n}$. Cette fonction est continue, strictement positive et non intégrable sur $I = [1, +\infty[$.
Soit et dans le même contexte : $G_n(x) = \int_1^x f_n$. Une IPP directe conduit à $G_n(x) = f_n(x) - e + nG_{n+1}(x)$ et la relation de négligabilité 2)i) donne aussi $G_n(x) = f_n(x) + \underset{x \to +\infty}{o}(f_n(x))$
Enfin, pour tout $t \geq 1$, $\frac{e^t}{1+t^2} = \frac{e^t}{t^2}(1 - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4+t^2})$ dès lors et, pour $x \geq 1$:
$\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1} dt = G_2(x) + o(f_3(x)) = f_2(x) - e + 2(f_3(x)) + o(f_3(x))$; ce qui implique le développement voulu■