Corrigé du TD 12 : Intégrales généralisées et intégrabilité

Exercice ($\star$) 1 *(Intégrabilité)*
a) Etude de l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $t \to e^{-\sqrt{t}}$.
b) Etude de l'intégrabilié sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \to \dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t^{5/2}+1}$.
c) Etude de l'intégrabilité sur $]0, \dfrac{\pi}{2}[$ de $t \to \dfrac{1}{\sqrt[3]{\tan(t)}}$.
d) Etude de l'intégrabilité sur $]0,1[$ de $t \to \dfrac{1}{\ln(1-t)}$.
e) Etude de l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $t \to x^{1789}\sin(x)e^{-x^2}$.

Exercice ($\star\star$) 1 *(Absolue convergence)*
i) Démontrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-i)^2}$ est absolument convergente.
ii) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-i)^2}$.
iii) En déduire celle de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx$.

Exercice ($\star\star$) 2 *(Intégrale de Poisson)*
a)Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt$ convergent et ont même valeur.
b)On note I et J leurs valeurs. En calculant $I+J$,déterminer I et J.

Exercice ($\star\star$) 3 *(⚠)*
On se donne f continue sur $\mathbb{R}_+$ et positive.
a) Soit $L \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} L$.
On suppose en outre que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ converge.
Prouver que $L = 0$.
b) Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ converge-t-elle nécéssairement?
On définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+$ de la façon suivante :
$g(x) = n$ pour $x \in [n, n+\dfrac{1}{n^3}]$ si $n \geq 2$ et $g(x) = 0$ sinon.
c) Etablir que g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
d) g est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?
e) g possède-t-elle une limite en $+\infty$?
f) Conclusion générale.

Solution :
a) On suppose $L > 0$ (L ne peut être que positif).
Dès lors pour x assez grand $f(x) \leq \dfrac{1}{x}$, ce qui montre la non intégrabilité de f en $+\infty$. Ce qui est contradictoire. Ainsi, par l'absurde $\boxed{L = 0}$ ■
b) Non, prendre pour cela $f : x \geq 0 \to \dfrac{1}{x+1}$ ■
c) Les points de discontinuité sont les n et les $n + \dfrac{1}{n^3}$ qui forment bien un ensemble discret si n décrit $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

En ces points il y a bien limite à droite et à gauche : 0 et n (pas dans le même ordre) et ailleurs g est continue■

d) On utilise la suite adaptée (n) à $\mathbb{R}_+$ et il nous suffit de montrer que la série $\sum_{n\geq 0}\int_n^{n+1} g$ converge.

Et c'est bien le cas puisque, et pour tout $n \geq 2$, $\int_n^{n+1} g = \frac{1}{n^2}$■

e) Non puisque $g(n) \to \infty$ alors que $g(n+1/2) \to 0$ si $n \to +\infty$■

f) Ne faire aucune corrélation entre limite en $+\infty$ de l'intégrande et nature de son intégrale généralisée■

Exercice ($\star\star\star$) 1 *Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles.*
On suppose que les intégrales généralisées $\int_0^\infty (f')^2(t)dt$ et $\int_0^\infty t^2f^2(t)dt$ convergent.
Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^\infty f^2(t)dt$ converge et que :
$\int_0^\infty f^2(t)dt \leq (\int_0^\infty (f')^2(t)dt)^{1/2}(\int_0^\infty t^2f^2(t)dt)^{1/2}$.

Solution :

i) On montre l'intégrabilité de f^2 sur $\mathbb{R}_+$:

Pour cela on note que f^2 est, au moins, continue sur $\mathbb{R}_+$ (pas de problème en 0) et que, pour $t \geq 1$ $0 \leq f^2(t) \leq t^2f^2(t)$. Comme $t \to t^2f^2(t)$ est, par hypothèse, intégrable, il en ressort bien que $\boxed{f^2 \in L^1(\mathbb{R}_+)}$■

ii) On s'occupe de l'inégalité en vue.

On pose, pour $t \geq 0$: $g(t) = tf(t)$. Les données (voir votre cours svp) font que g, f' appartiennent à $L^2_c(\mathbb{R}_+)$ qui est un espace préhilbertien avec son produit scalaire usuel $(u,v) \to \int_0^\infty uv$. Dès lors l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit[1]: $\boxed{|\int_0^\infty g(t)f'(t)dt| \leq (\int_0^\infty (f')^2(t)dt)^{1/2}(\int_0^\infty t^2f^2(t)dt)^{1/2}\ (1)}$.

Soit $X \geq 0$ et effectuons une IPP: $\int_0^X 2tf(t)f't)dt = Xf^2(X) - \int_0^X f^2(t)dt$ (2). Les deux intégrales possèdant une limite finie si $X \to \infty$, il existe alors un réel $L \geq 0$ tel que $Xf^2(X) \underset{X\to\infty}{\to} L$. Mais si $L > 0$ alors $f^2(t) \sim \frac{L}{t}$ en $+\infty$, ce qui contredit notre i) donc $L = 0$ et en passant à la limite dans (2) et en injectant l'égalité obtenue dans (1) nous obtenons:

$\boxed{\frac{1}{2}\int_0^\infty f^2(t)dt \leq (\int_0^\infty (f')^2(t)dt)^{1/2}(\int_0^\infty t^2f^2(t)dt)^{1/2}}(\heartsuit)$.

Ce qui est plus faible que le voudrait l'énoncé qui est en fait $\boxed{\text{éronné}}$; en prenant $f(t) = e^{-t^2}$ (Un cas d'égalité pour notre utilisation de C.S), on voit alors que $(\heartsuit)$ devient égalité, ce qui interdit d'espérer mieux qu'elle■

Exercice ($\star\star\star$) 2 *(Utilisation de séries)*
On veut prouver l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $f : x \to \frac{1}{1+x^6(\sin(x))^2}$.
Pour cela on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)dx$.
Prouver successivement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que :
a) $u_n = \int_0^\pi \frac{dt}{(1+(t+n\pi)^6(\sin(t))^2}$.
b) $u_n \leq \int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^6(\sin(t))^2} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+(n\pi)^6(\sin(t))^2}$.
c) $u_n \leq 2\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+(n\pi)^6(\frac{2t}{\pi})^2}$. *(Inégalité de convexité)*
d) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
e) Conclure.

Solution :

a) Il suffit de poser dans u_n $x = t + n\pi$, ce pour tout n■

[1]et donne l'intégrabilité de gf'

b) Posons, pour tout n, f_n comme l'intégrande de u_n.
Pour tout $t \in [0,\pi]$, $f_n(t) \leq \dfrac{1}{1+(n\pi)^6(\sin(t))^2}$ puis la croissance de l'intégrale donne la première inégalité.
Posons g_n comme l'intégrande de l'intégrale majorante, celle-ci est π périodique et paire donc $\int_0^\pi g_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g_n = 2\int_0^{\pi/2} g_n$; ce qui fournit l'égalité demandée■
c) La fonction sinus étant concave sur $[0,\pi]$, son graphe est au dessus de ses cordes. En particulier au dessus de la corde joignant l'origine à $(\pi/2, 1)$. Ce qui donne (inégalité classique) $\sin(t) \geq \dfrac{2}{\pi}t$ pour $t \in [0,\pi/2]$. Cette information et la croissance de l'intégrale conduisent à c)■
d) Fixons l'entier naturel $n \geq 1$ et posons $A = 2\pi^2 n^3 > 0$; nous avons $0 \leq u_n \leq 2\int_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{1+A^2t^2} = \dfrac{1}{A}\left[\arctan(At)\right]_0^{\pi/2} = O(1/n^3)$. La convergence de la STP $\sum_{n\geq 0} u_n$ en découle■
e) La suite $(n\pi)$ étant adaptée à $\mathbb{R}_+$, la convergence précédente assure l'intégrabilité de la fonction f continue et positive sur $\mathbb{R}_+$■

Exercice ($\star\star$) **4** *(Comparaison série intégrale)*
Nature de la série de terme général : $u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ *?*

Exercice ($\star\star$) **5** *(CCINP)*
On admet (C'est l'intégrale de Dirichlet dont on a vu en cours la semi-convergence) que $\boxed{\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}dx = \dfrac{\pi}{2}}$.
En utilisant l'identité $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$ *(valable pour tout réel x), établir que l'intégrale généralisée* $\int_0^\infty \dfrac{\sin^3 x}{x}dx$ *converge et déterminer sa valeur.*

Exercice ($\star\star$) **6** *(Semi-convergence)*
Nature de $\int_0^\infty \sin(t)\sin(1/t)dt$.

Exercice ($\star\star\star$) **3** *(⚠ et à méditer)*
Pour $x \geq 1$, *on pose* $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)}$ *et* $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$.
a) Avec IPP (cf cours sur intégrale de Dirichlet), établir que $\int_1^\infty g(x)dx$ *converge.*
On rappelle (prouvé en cours) que $\int_1^\infty \dfrac{\sin^2(x)}{x}dx$ *diverge.*
b) Vérifier que $g(x) - f(x) \sim \dfrac{\sin^2(x)}{x}$ *si* $x \to +\infty$.
c) Quelle est la nature de $\int_1^\infty f(x)dx$ *?*
d) A l'aide de b), prouver aussi que $f(x) \sim g(x)$ *si* $x \to +\infty$. *Morale?*

Exercice ($\star\star$) **7** *Pour* $x \geq 1$, *on pose* $f(x) = xe^{ix^3}$.
1) Vérifier que $|f(x)| \underset{x\to\infty}{\to} +\infty$.
2) Montrer que $\int_1^\infty f(x)dx$ *converge (changement de variable et IPP).*

Solution :
2) Il suffit en effet de poser $x = \phi(t) = t^{1/3}$ (ϕ changement de variable légitime de $[1,+\infty[$ sur lui-même) pour voir que notre IG est de même nature que $\int_1^\infty \dfrac{e^{it}}{t^{1/3}}$. Une IPP similaire à celle effectuée au a) de l'exercice précédent et corrigé en classe conduit au résultat■

Exercice ($\star\star\star$) **4** *Soit f une fonction continue, croissante sur [0,1[et positive.*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}))$.
Etablir que f est intégrable sur $[0,1[$ ssi la suite (S_n) converge. Dans ce cas, prouver aussi que $S_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^1 f$.

Solution :
Posons pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_{n,k} = \frac{k}{n}$ et, pour tout $x \in [0,1[$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
La positivité de f fait que f est intégrable sur $[0,1[$ ssi la suite $(I_n = F(a_{n,n-1}))$ est majorée ou qu'elle converge.
Des considérations d'aire découlant à nouveau de la croissance de f (s'aider au besoin d'un dessin) montrent que:
pour $k \in [\![0, n-2]\!]$, $f(k/n) \leq \int_{a_{n,k}}^{a_{n,k+1}} f \leq f(\frac{k+1}{n})$ donc, par sommation,
$S_n + \frac{f(0) - f(a_{n,n-1})}{n} \leq I_n \leq S_n (\Diamond)$, ce pour tout $n \geq 1$.
i) Supposons que la suite (S_n) converge alors elle est majorée et, par l'encadrement précédent il en va de même pour la suite (I_n) et le caractère intégrable de f est prouvé$\square$
ii) On suppose f intégrable sur $[0,1[$. Alors on peut définir, pour tout x de cet intervalle $G(x) = \int_x^1 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - F(x)$. Par définition de la convergence d'une IG, nous avons donc $G(x) \underset{x\to 1}{\to} 0$ (*).
De plus par croissance de f et de l'intégrale et tout $x \in [0,1[$ il vient : $0 \leq (1-x)f(x) \leq G(x)$ donc (via $x \leftarrow a_{n,n-1} = 1 - 1/n$) $0 \leq \frac{f(a_{n,n-1})}{n} \leq G(1-1/n)$, ce pour tout entier naturel n non nul. Cet encadrement prouve avec (*) que $\frac{f(a_{n,n-1})}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
$(\Diamond)$ se réécrit $I_n \leq S_n \leq I_n + \frac{f(a_{n,n-1})}{n} - f(0)/n$, ce qui précède et le théorème des gendarmes prouvent alors que la suite (S_n) converge vers la limite de la suite (I_n) à savoir $\int_0^1 f(t)dt$$\blacksquare$

Exercice ($\star\star\star\star$) **1** *(Suite dernier exercice du TD11)*
Soient deux séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ à termes strictement positifs.
6) Etablir les analogues discrets des résultats obtenus en 1) et 2).
7) En ***déduire*** *un équivalent si $n \to +\infty$ de :*
i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
ii) $\sum_{k=1}^{n} \ln k$.
iii) $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.
iv) $\sum_{k=1}^{n} 2^k \ln k$.
(C'est un peu artificiel).
8)(Tout aussi tiré par les cheveux) ***Déduire*** *de 6) une preuve du théorème de Cesaro.*

Solution :
6) Comme indiqué dans les compléments de cours on définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = a_n$ et $g(x) = b_n$ si $x \in [n, n+1[$, ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On note S_n (resp. S'_n) la somme partielle d'ordre n de $\sum_{n\geq 0} a_n$ (resp. $\sum_{n\geq 0} b_n$) et le cas échéant R_n (resp. R'_n le reste d'ordre n de $\sum_{n\geq 0} a_n$ (resp. $\sum_{n\geq 0} b_n$), ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En conservant les notations du dernier exercice du TD11, on a $F(n) = S_n$, $G(n) = S'_n$ et, sous réserve d'existence $R(n+1) = R_n$ et $T(n+1) = R'n$, ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Les questions 1) et 2) de l'exercice dont celui-ci est la suite donnent alors :

i) $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge :
$a_n = o(b_n) \Longrightarrow R_n = o(R'_n)$ et $a_n \sim b_n \Longrightarrow R_n \sim R'_n\square$
ii) $\sum_{n\geq 0} b_n$ diverge :
$a_n = o(b_n) \Longrightarrow S_n = o(S'_n)$ et $a_n \sim b_n \Longrightarrow S_n \sim S'_n\blacksquare$
7) Pour i) ii) et iv) à chaque fois nous sommes dans le cas de divergence et on va proposer un terme général de série noté b_n dont on pourra évaluer simplement (télescopage) les sommes partielles et tel que $b_n \sim a_n$, où a_n est le terme général dont nous voulons évaluer le comportement des sommes partielles, notées systématiquement S_n. A charge pour vous de vérifier à chaque fois que l'on se trouve dans ce contexte.
n étant assez grand pour que tout ait du sens :
i) $a_n = 1/n$, on propose $b_n = \ln(1 + 1/n)$ donc $S_n \sim \ln(n + 1) =\sim \ln(n)\square$
ii) $a_n = \ln(n)$, on propose $b_n = (n + 1)\ln(n + 1) - n\ln(n)$ donc $S_n \sim n\ln(n)\square$
iv) $a_n = 2^n \ln(n)$; on propose $b_n = 2^{n+1} \ln(n + 1) - 2^n \ln(n)$ donc $S_n \sim 2^{n+1} \ln(n)\square$
Pour iii) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$; on propose $b_n\dfrac{1}{n(n + 1)}$ donc $R_n \sim \dfrac{1}{n}\square$

Exercice ($\star\star\star$) 5 *(Pour rattraper mon manque de réactivité sur une question d'A. et S.)*
Il s'agit de montrer que les hypothèses concernant la définition donnée (mais au programme) pour le changement de variable (légitime) est un peu redondante (mais pas tout à fait dans le sens de la question posée).
a) Soit f une application continue sur un intervalle I et réalisant une bijection de I sur J (nécesairement intervalle).
On veut montrer que f est strictement monotone.
Soient $x > y > z$ dans I et $g : t \in [0, 1] \to f((1 - t)y + tx) - f((1 - t)z + ty)$.
i) Etablir que g est de signe constant sur I.
ii) En déduire que f est bien strictement monotone sur I.
b) Le résultat perdure-t-il si f n'est plus continue mais toujours bijective de I sur J.