

Devoir Libre 2 : Correction

Exercice 1 : Saponification

1. Bilan de matière pour la réaction de saponification

	Avancement	$\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5(\text{aq})$	$\text{HO}^-(\text{aq})$	$\text{CH}_3\text{CO}_2^-(\text{aq})$	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\text{aq})$
État initial	0	a_0	a_0	0	0
État en cours	0	$a_0 - x$	$a_0 - x$	x	x

Notons α et β les ordres partiels par rapport à l'acétate d'éthyle et les ions hydroxyde. L'ordre global est égale à 2 donc $\alpha + \beta = 2$.

Les deux expressions de la vitesse volumique de réaction sont :

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{et (loi de vitesse)} \quad v = k[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5]^\alpha [\text{HO}^-]^\beta = k(a_0 - x)^2$$

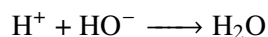
On en déduit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = k(a_0 - x)^2$$

Séparons les variables et intégrons :

$$\int_0^x \frac{dx}{(a_0 - x)^2} = k \int_0^t dt \quad \text{soit} \quad \frac{1}{a_0 - x} - \frac{1}{a_0} = kt \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{1}{a(t)} - \frac{1}{a_0} = kt}$$

2. La réaction de dosage des ions hydroxyde s'écrit



À l'équivalence la quantité d'ions hydrogène versé est égale à la quantité d'ions hydroxyde présents initialement dans le prélèvement à la date t :

$$[\text{HO}^-](t)V_b = C_a V_a(t) \quad \text{soit} \quad a(t)V_b = C_a V_a(t)$$

On en déduit

$$k = \frac{1}{t} \left(\frac{V_b}{C_a V_a(t)} - \frac{1}{a_0} \right)$$

$$\boxed{k = \frac{1}{20 \text{ min}} \left(\frac{100 \text{ cm}^3}{0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 6,16 \text{ cm}^3} - \frac{1}{2,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}} \right) = 5,62 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

3. On cherche V_a à la date $t = 40 \text{ min}$.

$$V_a(t) = \frac{V_b}{C_a(kt + 1/a_0)}$$

$$\boxed{V_a(40 \text{ min}) = \frac{0,100 \text{ L}}{0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times (5,62 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 40 \text{ min} + 1/(2,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}))} = 3,64 \cdot 10^{-3} \text{ L}}$$

4.

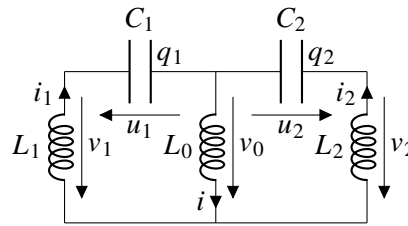
	Avancement	$\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5(\text{aq})$	$\text{HO}^-(\text{aq})$	$\text{CH}_3\text{CO}_2^-(\text{aq})$	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\text{aq})$
État initial	0	a_0	$5a_0$	0	0
État en cours	0	$a = a_0 - x$	$5a_0 - x$	x	x

$$v = \frac{dx}{dt} = k[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5][\text{HO}^-] \quad \text{soit} \quad \frac{dx}{dt} = ka(5a_0 - x)$$

Or $x = a_0 - a$ donc $\boxed{-\frac{da}{dt} = ka(a + 4a_0)}$.

Exercice 2 : Circuits couplés

Pour $t > 0$ le circuit est le suivant :



1. Les lois de Kirchhoff et les relations courant-charge-tension des dipôles donnent :

$$\begin{cases} v_1 + u_1 = v_0 & ; & v_2 + u_2 = v_0 \\ v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} & ; & v_0 = -L_0 \frac{di}{dt} & ; & v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \\ i = i_1 + i_2 & ; & i_1 = -\frac{dq_1}{dt} & ; & i_2 = \frac{dq_2}{dt} \\ q_1 = -C_1 u_1 & ; & q_2 = C_2 u_2 \end{cases}$$

Réécrivons la première équation en faisant apparaître les charges et leurs dérivées :

$$-L_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} - \frac{q_1}{C_1} = -L_0 \left(-\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{d^2 q_2}{dt^2} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{(L_0 + L_1) \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{C_1} = L_0 \frac{d^2 q_2}{dt^2}}$$

Procédons de la même façon pour la deuxième équation :

$$L_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{q_2}{C_2} = -L_0 \left(-\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{d^2 q_2}{dt^2} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{(L_0 + L_2) \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{q_2}{C_2} = L_0 \frac{d^2 q_1}{dt^2}}$$

Dans le cas où $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$ et en identifiant à partir des solutions proposées :

$$\ddot{q}_1 + \Omega^2 q_1 = \alpha \ddot{q}_2 \quad (1)$$

$$\ddot{q}_2 + \Omega^2 q_2 = \alpha \ddot{q}_1 \quad (2)$$

nous obtenons

$$\boxed{\alpha = \frac{L_0}{L + L_0} \quad ; \quad \Omega = \frac{1}{\sqrt{(L + L_0)C}}}$$

2. Les deux équations sont couplées par l'intermédiaire du paramètre L_0 : si $L_0 = 0$ alors le circuit équivaut à deux circuits oscillants LC indépendants. Dans ce cas la branche du milieu se comporte en effet comme un fil.

3. Les charges des condensateurs q_1 et q_2 sont continues. Or $q_1(0^-) = 0$ et $q_2(0^-) = Q_0$ donc

$$\boxed{q_1(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad q_2(0^+) = Q_0}$$

L'intensité du courant dans une bobine est continue donc i_1 et i_2 sont continues. Or $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$ donc $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$ et par suite

$$\boxed{\frac{dq_1}{dt}(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dq_2}{dt}(0^+) = 0}$$

4. (1)+(2) donne :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \Omega^2 (q_1 + q_2) &= \alpha (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ (1 - \alpha) \ddot{S} + \Omega^2 S &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\ddot{S} + \Omega_S^2 S = 0} \quad \text{où} \quad \boxed{\Omega_S = \frac{\Omega}{\sqrt{1 - \alpha}}}$$

En procédant de la même façon en écrivant (2)-(1) on obtient

$$\boxed{\ddot{D} + \Omega_D^2 D = 0} \quad \text{où} \quad \boxed{\Omega_D = \frac{\Omega}{\sqrt{1 + \alpha}}}$$

5. S et D vérifient une équation différentielle d'un oscillateur harmonique. Les solutions sont de la forme

$$\begin{aligned} S(t) &= E \cos(\Omega_S t) + F \sin(\Omega_S t) \\ D(t) &= G \cos(\Omega_D t) + H \sin(\Omega_D t) \end{aligned}$$

où E, F, G et H sont des constantes que l'on détermine grâce aux conditions initiales.

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -E\Omega_S \sin(\Omega_S t) + F\Omega_S \cos(\Omega_S t) \quad \text{donc} \quad \dot{S}(0) = F\Omega_S \\ \dot{D}(t) &= -G\Omega_D \sin(\Omega_D t) + H\Omega_D \cos(\Omega_D t) \quad \text{donc} \quad \dot{D}(0) = H\Omega_D \end{aligned}$$

Or $\dot{S}(0) = \dot{D}(0) = 0$ donc $\boxed{F = H = 0}$.

Nous en déduisons que $S(0) = E$ et $D(0) = G$. Or $S(0) = q_1(0) + q_2(0) = Q_0$ et $D(0) = q_2(0) - q_1(0) = Q_0$ donc $\boxed{E = G = Q_0}$.

$$\boxed{S(t) = Q_0 \cos(\Omega_S t)} \quad \text{et} \quad \boxed{D(t) = Q_0 \cos(\Omega_D t)}$$

6. On a $q_1 = \frac{S - D}{2}$ et $q_2 = \frac{S + D}{2}$ d'où

$$\begin{cases} q_1(t) = \frac{1}{2} Q_0 [\cos(\Omega_S t) - \cos(\Omega_D t)] = -Q_0 \sin\left(\frac{\Omega_S + \Omega_D}{2} t\right) \sin\left(\frac{\Omega_S - \Omega_D}{2} t\right) \\ q_2(t) = \frac{1}{2} Q_0 [\cos(\Omega_S t) + \cos(\Omega_D t)] = Q_0 \cos\left(\frac{\Omega_S + \Omega_D}{2} t\right) \cos\left(\frac{\Omega_S - \Omega_D}{2} t\right) \end{cases}$$

7. Pour un couplage faible $L_0 \ll L$ donc $\alpha \approx 0$ et par suite

$$\Omega_S \approx (1 + \frac{1}{2}\alpha)\Omega \quad \text{et} \quad \Omega_D \approx (1 - \frac{1}{2}\alpha)\Omega \quad \text{avec} \quad \boxed{\Omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_S + \Omega_D}{2} &\approx \Omega \quad \text{et} \quad \frac{\Omega_S - \Omega_D}{2} \approx \frac{\alpha}{2}\Omega \\ \begin{cases} q_1(t) \approx -Q_0 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\Omega t\right) \sin(\Omega t) \\ q_2(t) \approx Q_0 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\Omega t\right) \cos(\Omega t) \end{cases} \end{aligned}$$

Les charges sont le produit d'un terme harmonique de pulsation Ω par un terme d'amplitude sinusoïdal de pulsation $\frac{\alpha}{2}\Omega \ll \Omega$. On obtient donc une allure de sinusoïde rapide mais dont l'amplitude varie très lentement de façon sinusoïdale : il s'agit d'un phénomène de battements.

Ci-dessous on a tracé $\frac{q_1}{Q_0}$ et $\frac{q_2}{Q_0}$ pour $\alpha = \frac{1}{10}$ en fonction de $\frac{t}{T}$ où $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. Les enveloppes $\pm \sin(\frac{\alpha}{2}\Omega t)$ et $\pm \cos(\frac{\alpha}{2}\Omega t)$ sont représentées en tirets.

