Devoir à la maison n° 4

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée sur cet intervalle.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. Le taux d'accroissement de f a-t-il une limite en 0 ? Que peut-on en déduire sur la dérivabilité de f ?
   On pourra utiliser l'approximation $\sin x \underset{x\to 0}{\simeq} x - \dfrac{x^3}{6}$.
4. Soit $g : x \mapsto x\cos(x) - \sin(x)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Étudier le signe de g sur $[0, \pi]$. En déduire les variations de f sur $[0, \pi]$.
   (b) Montrer que l'équation $x\cos(x) = \sin(x)$ d'inconnue $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$ admet une unique solution x_n.
   (c) En déduire le signe de g, puis les variations de f, sur $[n\pi, (n+1)\pi]$.
5. Étudier la limite de f en $+\infty$.
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, 6\pi]$.

Exercice 2. Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.
1. Montrer que : $(A \subset B) \Rightarrow ((E \setminus B) \subset (E \setminus A))$.
2. A-t-on l'équivalence : $(A \subset B) \Leftrightarrow ((E \setminus B) \subset (E \setminus A))$?
3. On souhaite montrer l'équivalence :

$$(A \cap (E \setminus B) = A \cap (E \setminus C)) \Leftrightarrow (A \cap B = A \cap C).$$

   (a) Justifier qu'il suffit de montrer que : $(A \cap B = A \cap C) \Rightarrow (A \cap (E \setminus B) \subset A \cap (E \setminus C))$.
   (b) Montrer cette implication. Conclure.