

Corrigé partiel du TD 13 : Intégrales à paramètre

Exercice (★) 1 (CCINP MP)

Pour $x \geq 0$, soit $G(x) = \int_0^\infty x e^{-xt} dt$.

- Calculer $G(x)$ pour $x \geq 0$.
- G est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?
- Que peut-on en conclure sur l'hypothèse de domination?

Exercice (★★) 1 (Intégrale de Dirichlet : Centrale MP)

Soit $f : x \rightarrow \int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt$.

- Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Limites en $+\infty$ de f et de f' ?
- Exprimer f' sans signe $\int$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Donner l'intégrale de Dirichlet en fonction de $f(0)$ et trouver sa valeur.

Solution:

a) On posera, pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, $u(x, t) = \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt}$.

Afin d'utiliser le théorème de continuité sous le signe $\int$, on vérifie :

- Pour tout $t > 0$, $x \rightarrow u(x, t)$ est trivialement continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \geq 0$ $t \rightarrow u(x, t)$ est C_M sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue sur ce même intervalle.
- En posant, pour $t > 0$, $\phi(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2}$ et en remarquant que cette fonction est continue, positive sur son intervalle de définition et qu'elle y est même intégrable (fausse singularité en 0, $O(1/t^2)$ en $+\infty$) puis, enfin, en observant que $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, $|u(x, t)| \leq \phi(t)$ (*).

Nous pouvons dire que f est bien continue sur $\mathbb{R}_+$ $\square$

Maintenant nous employons le théorème de dérivation sous le signe $\int$ à l'ordre 2. On constate en effet que:

- Pour tout $t > 0$, $x \rightarrow u(x, t)$ est trivialement de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $x > 0$ les applications $t > 0 \rightarrow u(x, t) \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ (cf ii) et iii) précédents) et $t > 0 \rightarrow \frac{\delta u}{\delta x}(x, t) = -\frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ (fausse singularité en 0 et $o(1/t^2)$ en $+\infty$ par exemple).
- Pour tout $x > 0$, $t > 0 \rightarrow \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(x, t) = (1 - \cos t) e^{-xt}$ est C_M sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue sur ce même intervalle.
- Sur tout intervalle du type $S = [a, +\infty[$, où $a > 0$, on dispose de $|(1 - \cos t) e^{-xt}| \leq e^{-at}$ (**), ce pour tout $x \in S$ et tout $t > 0$; ce qui valide la domination sur S de la dérivée partielle d'ordre 2 suivant le paramètre puisque $t \rightarrow e^{-at}$ positive et trivialement intégrable ($a > 0$) sur $\mathbb{R}_+$.

La règle de Leibniz à l'ordre 2 implique bien que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ $\square$

Par ailleurs, pour $x > 0$, $f'(x) = -\int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} dt$ (1) et $f''(x) = \int_0^\infty (1 - \cos t) e^{-xt} dt$ (2) $\blacksquare$

b) On utilise le théorème de passage à la limite sous le signe $\int$ pour les deux situations.

On observe qu'à $t > 0$ fixé $\frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $-\frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et que par ailleurs les dominations requises découlent de (*) et (**). Il en résulte, par passage à la limite sous le signe $\int$ que f et f'

admettent 0 comme limite à l'infini ■

c) Partons de (2) qui donne $f''(x) = 1/x - \operatorname{Re}(\int_0^\infty e^{(-x+i)t} dt) = \frac{1}{x} - \operatorname{Re}(\frac{1}{x-i}) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$, ce pour tout $x > 0$.

Par simple primitivation et, pour les mêmes x , il vient $f'(x) = \ln(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$, où C est un réel qui reste à déterminer.

C+Comme $\ln(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2} = \frac{\ln(\frac{x^2}{x^2+1})}{2} = -\frac{\ln(1+1/x^2)}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, la constante C est nulle en vertu de

b). Bilan $\boxed{\forall x > 0, f'(x) = \ln(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}}$ ■

d) On remonte à $f(x)$ par le même procédé (on effectue une primitivation par parties dans l'expression obtenue précédemment) et on récupère $f(x) = x \ln(x) - x - \frac{x \ln(x^2+1)}{2} + x - \arctan(x) + C' = -\frac{x \ln(1+1/x^2)}{2} + C' - \arctan(x)$, ce pour $x > 0$. En utilisant c) et d), il vient $C' = \frac{\pi}{2}$ et $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) + x \ln(x) - \frac{x \ln(x^2+1)}{2}$. Puis en faisant tendre x vers 0^+ (f continue en 0 par a), nous obtenons $\boxed{f(0) = \frac{\pi}{2}}$ □

Une IPP généralisée, facile à valider, fournit $f(0) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \left[-\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ soit

$f(0) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ et $\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$ ■

Exercice (★★) 2 (Une transformée de Fourier : Centrale PC)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-3/4} e^{itx} dt$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1. Montrer que la fonction $F : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & F(x) \end{matrix}$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Soit k un entier naturel non nul et soit x un réel. Donner une expression intégrale de $F^{(k)}(x)$, dérivée k -ième de F en x . Préciser $F(0)$.

2. Prouver que F vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation différentielle de la forme $F' + AF = 0$, où A est une fonction à préciser.

3. En déduire une expression de $F(x)$.

On pourra commencer par dériver la fonction $x \mapsto -\frac{1}{8} \ln(1+x^2) + \frac{i}{4} \arctan x$.

Exercice (★★★) 1 (Mines PC)

Soit $f : x \rightarrow \int_0^\infty \operatorname{sh}(x\sqrt{t}) e^{-t} dt$.

a) Montrer que f est C^2 sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver une EDLO2 dont f est solution.

c) Donner une autre expression de f .

Exercice (★★★) 2 (X : Théorème de division preuve de René Thom)

On se donne $f \in C^m(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ avec $m \geq 1$.

En étudiant $x \rightarrow \int_0^1 f'(tx) dt$, montrer que $g : x \rightarrow \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction C^{m-1} sur $\mathbb{R}_+$.

Solution:

$\boxed{\text{On peut supposer } m \geq 2 \text{ car direct pour } m = 1.}$

Commençons par observer que $F(x) = \int_0^1 f'(tx) dt$ a du sens pour tout $x \geq 0$ puisque f' est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus $F(0) = f'(0)$ et $F(x) = \left[\frac{f(tx)}{x} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{f(x)}{x}$ sinon.

On note déjà que $\boxed{F \text{ est un prolongement (par continuité) de } g(1).}$

Posons, pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$, $h(x, t) = f'(tx)$ ainsi on peut voir F comme une intégrale à paramètre à laquelle on applique la règle de Leibniz à l'ordre $m-1$. C'est en effet légitime puisque: i) Pour tout $t \in [0, 1]$, $x \rightarrow h(x, t)$ est de classe C^{m-1} sur $\mathbb{R}_+$ puisque f' l'est aussi.

ii) Pour tout $k \in \llbracket 0, m-2 \rrbracket$ et tout $x \geq 0$, $t \rightarrow \frac{\delta^k h}{\delta x^k}(x, t) = t^k f^{(k+1)}(xt)$ est continue sur les segment $[0, 1]$ donc y est intégrable.

iii) Pour tout $x \geq 0$, $t \rightarrow \frac{\delta^{m-1} h}{\delta x^{m-1}}(x, t) = t^{m-1} f^{(m)}(xt)$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$ car continue sur ce segment.

iv) On domine la dérivée partielle d'ordre $m-1$ suivant x sur tout segment du type $[0, a]$, où $a > 0$.

Comme $f^{(m)}$ est continue sur ce segment, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \in [0, a]$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$|f^{(m)}(xt)| \leq A. \text{ Dès lors, dans les mêmes conditions, } \left| \frac{\delta^{m-1} h}{\delta x^{m-1}}(x, t) \right| = |t^{m-1} f^{(m)}(xt)| \leq A.$$

Comme toute constante est intégrable sur le segment $[0, 1]$, notre domination est validée.

Il en résulte que F est de classe C^{m-1} sur $\mathbb{R}_+$; ce qui répond à la question compte tenu de (1) $\square$

On peut pousser plus loin notre avantage. La règle de Leibniz nous dit aussi que pour $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ et tout

$$x \geq 0, F^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(xt) dt; \text{ en particulier } F^{(k)}(0) = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1} \text{ (valable aussi pour } k=0) \blacksquare$$

Exercice (★★) 3 (Intégrale de Frullani)

Exprimer, suivant les réels strictement positifs a et b , $\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx$. On pourra dériver selon le paramètre a .

Exercice (★) 2 (CCINP PSI : transformée de Laplace du sinus cardinal)

Pour $x > 0$, on note:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt \text{ et } H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt.$$

1. Montrer que: $\forall t \in \mathbb{R}_+, |\sin(t)| \leq t$.
2. Montrer que les fonctions F , G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$.
4. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G .
5. Trouver une expression simple pour G et pour H . On pourra calculer $H(x) + iG(x)$.
En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t\alpha} \cos(\alpha t) dt$.
6. En déduire une expression simple pour F . Que vaut $F(1)$?

Solution:

Q1. Application classique (cf première année) de l'inégalité des accroissements finis $\blacksquare$

Q2. On fixe le réel $x > 0$. Les trois intégrandes sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ pour la première et sur $\mathbb{R}_+$ pour les deux autres et sont dominées toutes les trois sur leur intervalle de définition par $t \rightarrow e^{-tx}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$; ce qui montre l'existence de nos trois intégrales généralisées $\blacksquare$

Q3. On a donc pour tout $x > 0$ (Inégalité triangulaire + Q1) : $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$. Le théorème des gendarmes permet de conclure aisément $\blacksquare$

Q4. On va bien sûr utiliser la règle de Leibniz pour dériver sous le signe intégral.

On constate d'abord que :

• $\forall t > 0, x \rightarrow \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (exp l'étant elle-même).

• $\forall x > 0, t > 0 \rightarrow \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf Q2).

• $\forall x > 0, t \rightarrow \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} \right) = -\sin(t) e^{-tx}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc y est continue par morceaux $\square$

On procède ensuite à la domination (sur tout segment ici de la dérivée partielle de l'intégrande suivant le paramètre.

Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$, $x \in [a, b]$ alors :

$\forall t > 0, |-\sin(t)e^{-tx}| \leq e^{-at}$ et $t \rightarrow e^{-at}$ est bien positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ □

Nous pouvons appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral à F .

Ainsi F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0, F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt = -G(x)$ ■

Q5. On a facilement (et pour tout réel $x > 0$) $H(x) + iG(x) = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}$ d'où $G(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et

$$H(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \square$$

Le changement de variable affine $t = \frac{u}{\alpha}$ donne $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt = \frac{H(x/\alpha)}{\alpha} = \frac{\alpha^2}{x^2 + \alpha^2}$ ■

Q6 Les deux questions précédentes justifient l'existence d'un réel C tel que :

$\forall x > 0, F(x) = C - \arctan(x)$.

Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, il vient $C = \frac{\pi}{2}$.

En conclusion $\forall x > 0, F(x) = \arctan(\frac{1}{x})$ et $F(1) = \frac{\pi}{2}$ ■

Exercice (★★) 4 (CCINP MP)

Dans ce problème, on étudie certaines intégrales reliées aux intégrales dites de Fresnel.^a

a) Démontrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ converge. (Ecarter le problème en 0 et procéder à une IPP).

On considère les fonctions g et f définies comme suit :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i} dt \text{ pour } x \text{ réel et } f(x, t) = \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i} \text{ pour } (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Etablir que g est paire et prouver que g est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Préciser les limites de g aux bornes de son intervalle de définition.

d) Prouver que g est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

On pourra dans la suite utiliser librement la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss.

e) Vérifier que $g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}$ pour $x > 0$.

f) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $x \rightarrow \frac{1}{x^2-i}$.

On admet ensuite que :

$$\frac{1}{X^2-i} = \frac{1-i}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1} + \frac{i}{X^2-X\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+X\sqrt{2}+1} + \frac{i}{X^2+X\sqrt{2}+1} \right), \text{ ce}$$

pour tout réel X .
g) Démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1} dt = \pi\sqrt{2}$. Donner la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1} dt$ puis déterminer la valeur de $g(0)$.

h) En déduire que: $\forall x > 0, g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi} \times \int_0^x e^{it^2} dt$.

i) Donner ensuite les valeurs de $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$, de $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ et de $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$.

^aAugustin Fresnel (1788-1827) démontra le caractère ondulatoire de la lumière et, pour cette raison, il est considéré comme un des fondateurs de l'optique moderne