Corrigé partiel du T. D. A5
Fonctions usuelles

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $\operatorname{sh} x = \sqrt{3}$ b. $\operatorname{ch} x = \sqrt{3}$ c. $\operatorname{th} x = \frac{2}{3}$

d. $12 \operatorname{ch} x = 25 \operatorname{th} x$ e. $\operatorname{ch} x = \frac{5}{3}$ f. $19 \operatorname{sh} x - 16 \operatorname{ch} x = 4$

g. $3 \operatorname{ch} 2x - 4 \operatorname{ch} x = 7$ h. $16 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 15$ i. $\operatorname{sh} 2x = \operatorname{ch} x$

j. $\operatorname{sh} x + \frac{2}{\operatorname{sh} x} = 3$ k. $6 \operatorname{ch} x - 7 \operatorname{sh} x = a \quad (a \in \mathbb{R})$

$\mathscr{S}_a = \left\{\ln(2+\sqrt{3})\right\}$ $\mathscr{S}_b = \left\{\pm \ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right\}$ $\mathscr{S}_c = \left\{\frac{\ln 5}{2}\right\}$

$\mathscr{S}_d = \{\ln 2, \ln 3\}$ $\mathscr{S}_e = \{\pm \ln 3\}$ $\mathscr{S}_f = \{\ln 5\}$

$\mathscr{S}_g = \{\pm \ln 3\}$ $\mathscr{S}_h = \{\ln 2\}$ $\mathscr{S}_i = \left\{\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

$\mathscr{S}_j = \left\{\ln(1+\sqrt{2}), \ln(2+\sqrt{5})\right\}$ $\mathscr{S}_k = \left\{\ln(\sqrt{a^2+13}-a)\right\}$

2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ calculer :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kx) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{sh}(kx)$$

On calcule :

$$C_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kx} \qquad \text{et} \qquad C_n - S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{-kx}$$

Grâce à la formule du binôme, puis en s'inspirant de la méthode de l'angle moitié :

$$C_n + S_n = e^{\frac{nx}{2}} \left(2 \operatorname{ch} \frac{x}{2}\right)^n \qquad \text{et} \qquad C_n - S_n = e^{-\frac{nx}{2}} \left(2 \operatorname{ch} \frac{x}{2}\right)^n$$

On en déduit :

$$C_n = 2^n \operatorname{ch} \frac{nx}{2} \operatorname{ch}^n \frac{x}{2} \qquad \text{et} \qquad S_n = 2^n \operatorname{sh} \frac{nx}{2} \operatorname{ch}^n \frac{x}{2}$$

3 Dériver les fonctions suivantes.

a. $f(x) = \operatorname{sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x$ b. $f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x$ c. $f(x) = \operatorname{th} x - \frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x$

d. $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{\operatorname{sh} x + \sin x}$ e. $f(x) = \operatorname{ch} x \cos x + \operatorname{sh} x \sin x$

a. $f(x) = \operatorname{ch}^3 x$ b. $f(x) = \operatorname{sh}^3 x$ c. $f(x) = \operatorname{ch}^{-4} x$

d. $f(x) = \dfrac{2\operatorname{sh} x \sin x}{(\operatorname{sh} x + \sin x)^2}$ e. $f(x) = 2\operatorname{sh} x \cos x$

5 Calculer les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{sh} 2x}$ b. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n - e^n}{\operatorname{ch} n}$ c. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\operatorname{ch} 2x)\ln(\operatorname{th} x)$ d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + i\frac{\pi}{n}\right)^n$

a. $\frac{3}{2}$ b. $+\infty$ c. -1 d. -1

6 Donner un équivalent simple des fonctions suivantes.

a. $x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$ en $+\infty$

b. $x \mapsto \operatorname{sh}\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)$ en 0 et en $+\infty$

c. $x \mapsto \tan\arcsin\frac{x}{x+1}$ en 0 et en $+\infty$.

a. $2x$ b. $\frac{x^2}{2}$ et $\frac{x}{2}$ c. x et $\sqrt{\frac{x}{2}}$

7 On souhaite étudier les fonctions arctan et th au voisinage de $+\infty$.

a. Donner un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\arctan x$, puis de $\frac{\pi}{2} - \arctan x$

b. En déduire le *développement asymptotique* suivant :

$$\arctan x \underset{(+\infty)}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

c. En procédant de même donner un développement asymptotique similaire pour la fonction th en $+\infty$.

a. $\arctan x \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\pi}{2}$ puis $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan\frac{1}{x} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{x}$

Pour la dernière équivalence on utilise : $\arctan u \underset{(0)}{\sim} u$.

Deux démonstrations de cette équivalence :

- Comme la fonction arc-tangente est dérivable en 0 alors :

$$\frac{\arctan u}{u} = \frac{\arctan u - \arctan 0}{u - 0} \xrightarrow[u\to 0]{} \arctan'(0) = 1$$

- Par changement de variable $v = \arctan u$. Alors $\tan v = u$ donc :

$$\frac{\arctan u}{u} = \frac{v}{\tan v} \xrightarrow[v \to 0]{} 1$$

c. On obtient de même : $\operatorname{th} x \underset{(+\infty)}{=} 1 - 2e^{-2x} + o(e^{-2x})$

$\boxed{8}$ Calculer les réels suivants.

$a = \cos\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)$ $b = \sin\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$ $c = \sin\left(2 \arcsin \frac{1}{7}\right)$

$d = \tan\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$ $e = \cos\left(\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$ $f = \sin\left(\arctan \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$

$g = \tan\left(2 \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $h = \sin(2 \arctan 3)$ $i = \tan\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

$a = \frac{3}{5}$ $b = \frac{12}{13}$ $c = \frac{8\sqrt{3}}{49}$ $d = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ $e = \frac{4}{5}$ $f = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$g = \frac{4}{3}$ $h = \frac{3}{5}$ $i = 7$

$\boxed{9}$ Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

a. $\arcsin x = \arcsin \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$

b. $\arccos \frac{x+1}{2} = \arcsin x$

c. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin x$

d. $\arcsin x = 2 \arccos x$

e. $\arccos x + \arccos(1 - x) = \frac{\pi}{2}$

f. $\arcsin x = \arctan 2x$

g. $\arctan x + \arctan 3x = \frac{\pi}{2}$

$\mathscr{S}_a = \{1\}$ $\mathscr{S}_b = \left\{\frac{3}{5}\right\}$ $\mathscr{S}_c = \left\{0, \pm \frac{1}{2}\right\}$ $\mathscr{S}_d = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$\mathscr{S}_e = \{0, \pm 1\}$ $\mathscr{S}_f = \left\{0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ $\mathscr{S}_g = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

$\boxed{10}$ Calculer :

$a = \arctan 2 + \arctan 3$ $b = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$

$c = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$ $d = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$

$a = \frac{3\pi}{4}$ $b = \frac{\pi}{4}$ $c = \frac{5\pi}{4}$ $d = \frac{\pi}{4}$

11 Étudier les fonctions suivantes.

a. $f(x) = 5\operatorname{ch} x - 4\operatorname{sh} x$ b. $f(x) = \arccos(2x^2 - 1)$ c. $f(x) = \arctan \operatorname{sh} x$

d. $f(x) = \sin\left(2\arctan e^x\right)$ e. $f(x) = \arcsin \operatorname{th} x + \arccos \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$

f. $f(x) = \arcsin \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ g. $f(x) = \arctan \dfrac{x-1}{x+1}$

a. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 5\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(9e^{-x} - e^x).$$

Elle est décroissante sur $]-\infty, \ln 3]$,

croissante sur $[\ln 3, +\infty[$.

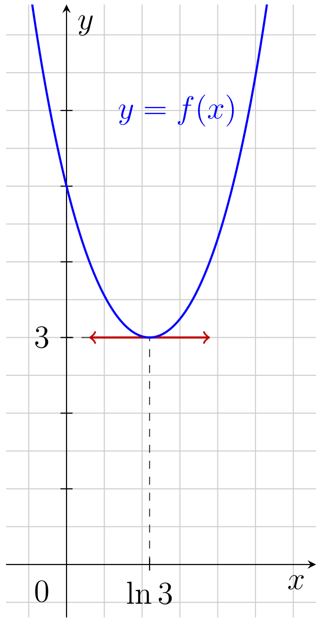
On calcule $f(\ln 3) = 3$.

Elle tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

On peut remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 3\operatorname{ch}(x - \ln 3),$$

ce qui montre que la courbe de f est une chaînette.



b. La fonction f est définie sur $[-1, 1]$, continue.

Elle est paire, donc on peut restreindre son étude à l'intervalle $[0, 1]$.

Elle est dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$, de dérivée :

$$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, 1[\qquad f'(x) = 2\frac{x}{|x|}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

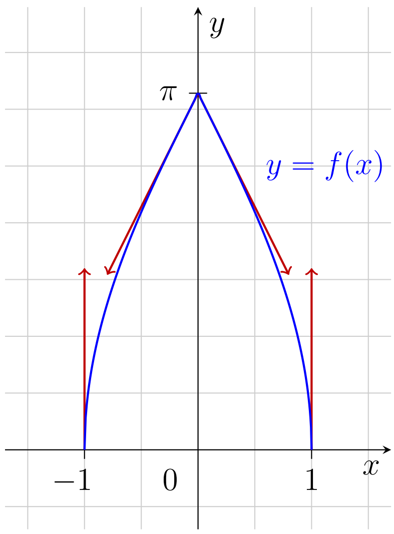
En particulier :

$$\forall x \in]0, 1[\qquad f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Comme $]0, 1[$ est un intervalle, et comme la fonction f est continue sur $[0, 1]$ alors il existe un réel K tel que :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad f(x) = 2\arccos x + K.$$

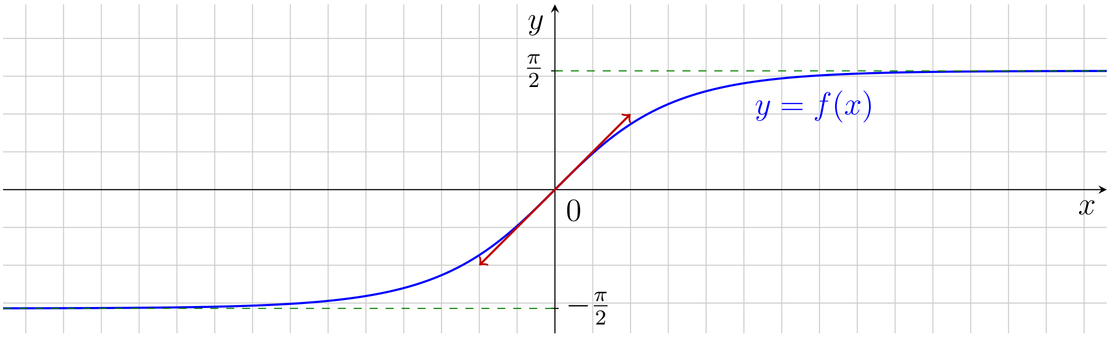
En calculant les valeurs en 0 on obtient $K = 0$, donc $f = 2\arccos$ sur $[0, 1]$, et par parité on peut compléter le tracé de la courbe de f.



c. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, dérivable de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

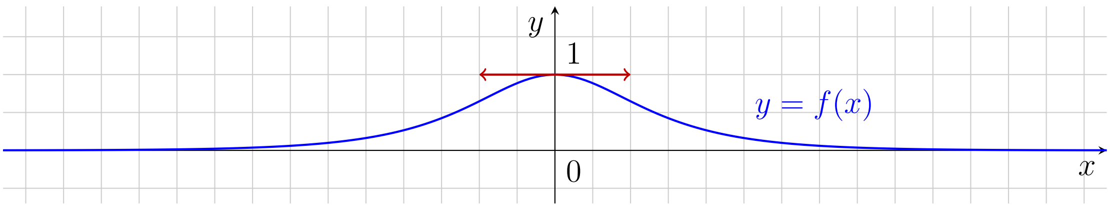
Elle est strictement croissante, de limites $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$ et $-\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$.
On calcule $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.



d. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} \cos\left(2 \arctan e^x\right)$$

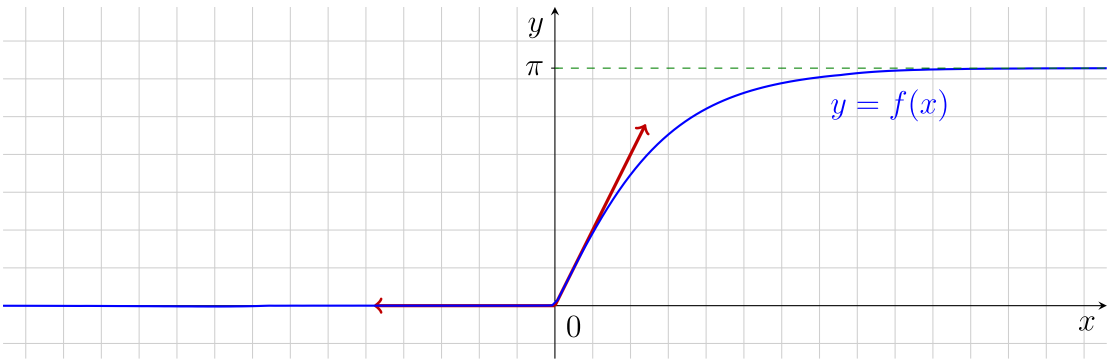
On démontre que f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Elle tend vers 0 en $\pm\infty$. On calcule $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
On peut démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$.



e. On démontre que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = \frac{2}{\operatorname{ch} x}(1 + \operatorname{sgn}(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{\operatorname{ch} x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ainsi f est constante que $\mathbb{R}_-$.



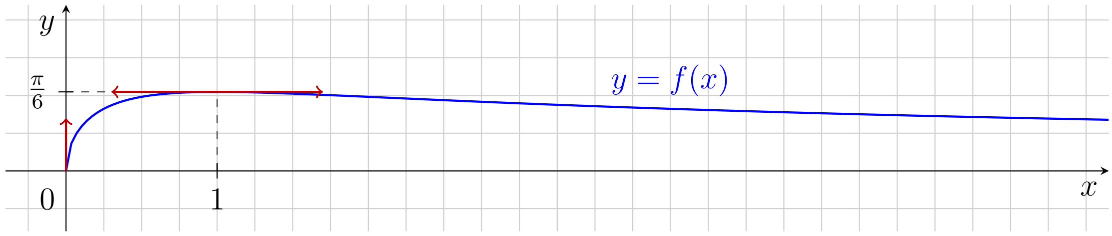
f. On démontre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad 0 \leqslant \frac{\sqrt{x}}{x+1} < 1$$

Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = \frac{1-x}{2(x+1)\sqrt{x}\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Ainsi f est croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$.
En utilisant l'équivalence $\arcsin u \underset{(0)}{\sim} u$ on démontre que f n'est pas dérivable en 0, et qu'elle admet une demi-tangente verticale en ce point.
On calcule $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{\pi}{6}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.



g. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, dérivable, de dérivée :

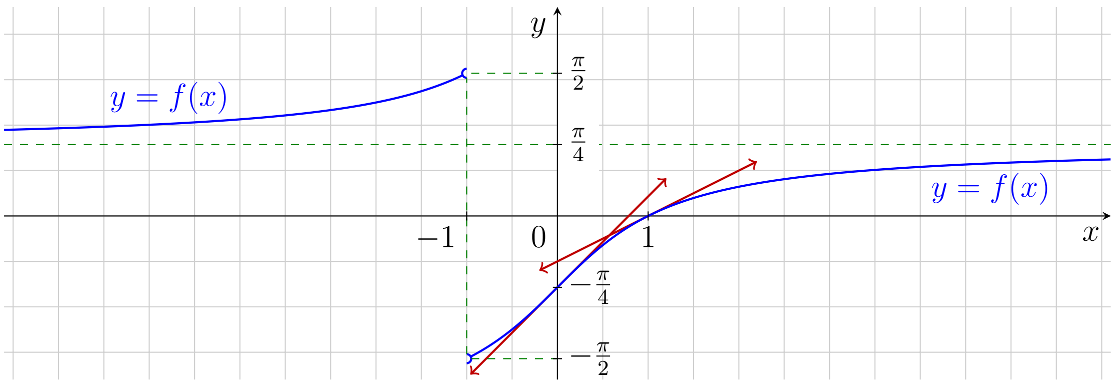
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Comme $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$ sont des intervalles alors il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que :

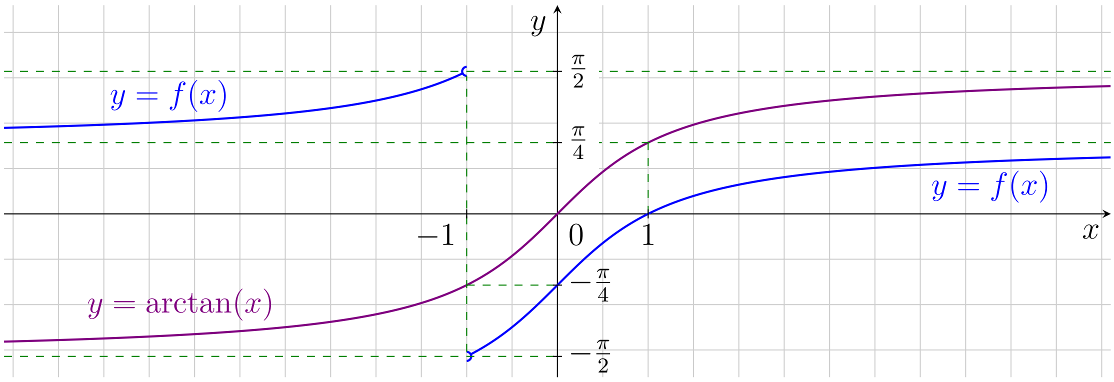
$$\begin{aligned} &\forall x \in\,]-\infty,-1[\qquad f(x) = \arctan x + K_1 \\ &\forall x \in\,]-1,+\infty[\qquad f(x) = \arctan x + K_2 \end{aligned}$$

Comme $f(0) = -\frac{\pi}{4}$ alors $K_2 = -\frac{\pi}{4}$.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ alors $K_1 = \frac{3\pi}{4}$.
On obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \qquad f(x) = \begin{cases} (\arctan x) + \frac{3\pi}{4} & \text{si } x < -1 \\ (\arctan x) - \frac{\pi}{4} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$



Avec la courbe de l'arc-tangente :



$\boxed{\mathbf{12}}$ Démontrer que pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$:

$$\arcsin x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Peut-on exprimer de façon aussi simple $\arccos x$ en fonction d'un arc-tangente ?

Méthode 1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \left]-1,1\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right). \end{array}$

En dérivant cette fonction, puis en utilisant le fait que $\left]-1,1\right[$ est un intervalle, on montre que $f(x) = \arcsin x$.

Méthode 2. On calcule :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\qquad \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \tan\left(\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Comme $\arcsin x$ et $\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ appartiennent à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction tan est injective sur cet intervalle alors on obtient l'égalité voulue.

Tout ceci n'est pas aussi simple pour l'arc-cosinus, car la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ est définie sur $\left[-1,0\right[\cup \left]0,1\right]$, qui n'est pas un intervalle.

On peut démontrer que :

$$\forall x \in \left[-1,0\right[\cup \left]0,1\right] \qquad \arccos x = \begin{cases} \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \in \left]0,1\right] \\ \pi + \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \in \left[-1,0\right[\end{cases}$$

Pour ceci on peut utiliser la méthode 1, ou sinon partir de la relation pour l'arc-sinus et utiliser les propriétés :

$$\forall x \in [-1,1] \qquad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

13 Pour tout $x \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$A(x) = \arctan \frac{x}{x+1} - \arctan \frac{x-1}{x} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{2k^2}$$

a. Démontrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $A(x)$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. Simplifier $A(x)$ en calculant sa tangente.

c. Calculer S_n.

On obtient $A(x) = \arctan \frac{1}{2x^2}$ puis par télescopage : $S_n = \arctan \frac{n}{n+1}$.

14 On note :

$$f(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)\right)\right)$$

a. Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Simplifier l'expression de $f(x)$.

Indication : calculer $\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$.

On obtient $\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \tan\theta$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = -|x|$.

15 On définit les fonctions :

$$f_1 = \arcsin \circ \sin \qquad f_2 = \arccos \circ \cos \qquad f_3 = \arctan \circ \tan$$

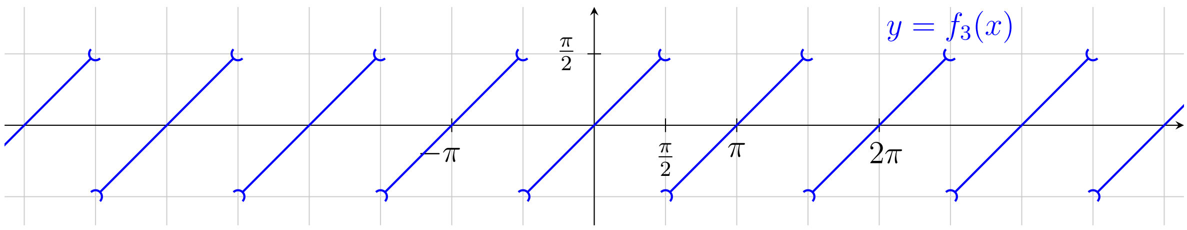
a. Déterminer l'ensemble de définition et une période de f_3, puis tracer sa courbe.
b. Déterminer l'ensemble de définition, une période et la parité de f_2, puis tracer sa courbe.
c. Déterminer l'ensemble de définition et une période de f_1, calculer $f_1(\pi - x)$, puis tracer sa courbe.
d. Démontrer que pour tout x dans l'ensemble de définition de f_3 :

$$f_3(x) = x - \pi\left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

a. La fonction f_3 est définie sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Elle est π-périodique.
Par définition de l'arc-tangente :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad f_3(x) = x.$$

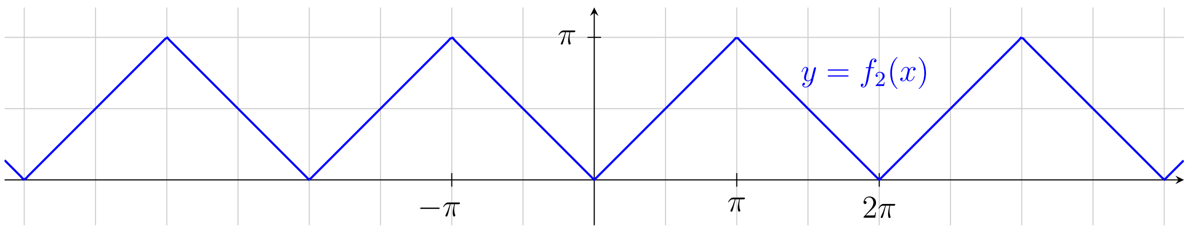
On construit sa courbe représentative grâce à la périodicité.



b. La fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}$.
Elle est 2π-périodique et paire.
On peut donc restreindre son étude à l'intervalle $[-\pi, \pi]$, puis à l'intervalle $[0, \pi]$.
Or, par définition de l'arc-cosinus :

$$\forall x \in [0, \pi] \qquad f_2(x) = x.$$

On construit sa courbe représentative grâce à la parité et la périodicité.



c. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$.

Elle est 2π-périodique.

On peut restreindre son étude à l'intervalle $[-\pi, \pi]$, mais on le restreint plutôt à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Par définition de l'arc-sinus :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad f_1(x) = x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

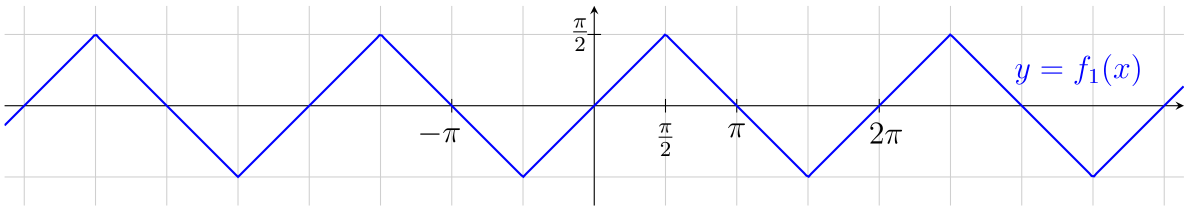
$$f_1(\pi - x) = \arcsin\sin(\pi - x) = \arcsin\sin x = f_1(x).$$

Si $\quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad$ alors $\quad \pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad$ donc $\quad f_1(\pi - x) = \pi - x.$

Ceci montre que :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \qquad f_1(x) = \pi - x.$$

On peut donc construire la courbe représentative de f_1.



d. L'ensemble de définition de f_3 est :

$$\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[.$$

Soit $x \in \mathscr{D}_{\tan}$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$:

$$k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

Ceci donne :

$$k < \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} < k + 1$$

En conséquence, comme k est entier :

$$k = \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor. \tag{2}$$

De plus l'encadrement (1) montre que :

$$-\frac{\pi}{2} < x - k\pi < \frac{\pi}{2}$$

On sait que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad f_3(x) = x$$

Comme $x - k\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors :

$$f_3(x - k\pi) = x - k\pi.$$

La fonction f_3 est π-périodique donc :

$$f_3(x) = x - k\pi.$$

L'expression (2) de k donne :

$$f_3(x) = x - \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor \pi.$$

Il s'agit de l'égalité demandée, et elle est valable pour tout x dans l'ensemble de définition de f_3.

16 Pour tout réel x on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à x, appelé *plafond* de x.
Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition du plafond :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad n = \lceil x \rceil \quad \Longleftrightarrow \quad n - 1 < x \leqslant n.$$

Par équivalence :

$$n - 1 < x \leqslant n \qquad \Longleftrightarrow \qquad -n \leqslant -x < -n + 1$$

Comme $-n$ est entier alors :

$$-n \leqslant -x < -n + 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -n = \lfloor -x \rfloor \qquad \Longleftrightarrow \qquad n = -\lfloor -x \rfloor$$

On a démontré :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad n = \lceil x \rceil \quad \Longleftrightarrow \quad n = -\lfloor -x \rfloor$$

Ceci signifie exactement que $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

$\boxed{17}$ Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$:

$$m\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor mx \rfloor \leqslant m\lfloor x \rfloor + m - 1$$

En déduire que :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Le premier résultat peut être démontré par récurrence, ou de la manière suivante.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la partie entière :

$$mx - 1 < \lfloor mx \rfloor \leqslant mx$$

Mais de plus, comme $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ alors :

$$m\lfloor x \rfloor \leqslant mx < m(\lfloor x \rfloor + 1) = m\lfloor x \rfloor + m$$

On en déduit par transitivité :

$$m\lfloor x \rfloor < \lfloor mx \rfloor + 1 \qquad \text{et} \qquad \lfloor mx \rfloor < m\lfloor x \rfloor + m$$

Donc

$$m\lfloor x \rfloor - 1 < \lfloor mx \rfloor < m\lfloor x \rfloor + m$$

Comme tous ces termes sont entiers alors :

$$m\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor mx \rfloor \leqslant m\lfloor x \rfloor + m - 1$$

Il s'agit du résultat attendu.
Comme $m > 0$ alors il implique :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \leqslant \lfloor x \rfloor + 1 - \frac{1}{m}$$

Puis :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} < \lfloor x \rfloor + 1$$

Comme $\lfloor x \rfloor$ est entier alors :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

$\boxed{\mathbf{18}}$ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $\lfloor 3x \rfloor = 2x + 5$ b. $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x + 4 \rfloor$ c. $\left\lfloor \frac{x-1}{x+3} \right\rfloor = 2$ d. $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2 + 3$

$\mathscr{S}_a = \left\{5, \frac{11}{2}\right\}$ $\mathscr{S}_b = \left[\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right[$ $\mathscr{S}_c = [-7, -5[$ $\mathscr{S}_d = \bigcup_{n \geqslant 2} \left[\sqrt{n^2+3}, \sqrt{n^2+4}\right[$

Pour la dernière :

Si $x \in [n, n+1[$ alors $\lfloor x^2 \rfloor \in \{n, \ldots, n^2+2n\}$ alors que $\lfloor x \rfloor^2 + 3 = n^2 + 3$, ce qui permet de montrer que $n \geqslant \frac{3}{2}$, donc $n \geqslant 2$.

Puis :

$$\begin{aligned} \left\lfloor x^2 \right\rfloor = n^2 + 3 \quad & \iff \quad n^2 + 3 \leqslant x^2 < n^2 + 4 \\ & \iff \quad \sqrt{n^2+3} \leqslant x < \sqrt{n^2+4}. \end{aligned}$$