Corrigé partiel du TD 13 : Intégrales à paramètre

Exercice ($\star$) 1 *(CCINP MP)*
Pour $x \geq 0$, *soit* $G(x) = \int_0^{\infty} xe^{-xt}dt$.
a) Calculer $G(x)$ *pour* $x \geq 0$.
b) G *est-elle continue sur* $\mathbb{R}_+$ *?*
c) Que peut-on en conclure sur l'hypothèse de domination?

Exercice ($\star\star$) 1 *(Intégrale de Dirichlet : Centrale MP)*
Soit $f : x \to \int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}dt$.
a) Montrer que f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
b) Limites en $+\infty$ *de* f *et de* f'*?*
c) Exprimer f' *sans signe* $\int$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
d) Donner l'intégrale de Dirichlet en fonction de $f(0)$ *et trouver sa valeur.*

Solution:
a)On posera, pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, $u(x,t) = \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}$.

Afin d'utiliser le $\boxed{\text{théorème de continuité sous le signe } \int}$, on vérifie :

i) $\boxed{\text{Pour tout } t > 0,\ x \to u(x,t) \text{ est notoirement continue sur } \mathbb{R}_+}$.

ii) $\boxed{\text{Pour tout } x \geq 0\ t \to u(x,t) \text{ est } C_M \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ car continue}}$ sur ce même intervalle.

iii) En posant, pour $t > 0$, $\phi(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$ et en remarquant que cette fonction est continue, positive sur son intervalle de défition et qu'elle y est même intégrable (fausse singularité en 0, $O(1/t^2)$ en $+\infty$) puis, enfin, en observant que $\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*,\ |u(x,t)| \leq \phi(t)\ (*)}$.

Nous pouvons dire que $\boxed{f \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}_+}$ $\square$

Maintenant nous employons $\boxed{\text{le théorème de dérivation sous le signe } \int \text{ à l'ordre 2}}$. On constate en effet que:

i) $\boxed{\text{Pour tout } t > 0,\ x \to u(x,t) \text{ est notoirement de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

ii) Pour tout $x > 0$ les applications $t > 0 \to u(x,t) \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ (cf ii) et iii) précédents) et $t > 0 \to \frac{\delta u}{\delta x}(x,t) = -\frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ (fausse singularité en 0 et $o(1/t^2)$ en $+\infty$ par exemple).

Siii) Pour tout $x > 0$, $t > 0 \to \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(x,t) = (1-\cos t)e^{-xt}$ est C_M sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue sur ce même intervalle.
iv) Sur tout intervalle du type $S = [a, +\infty[$, où $a > 0$, on dispose de $|(1-\cos t)e^{-xt}| \leq e^{-at}$ (**), ce pour tout $x \in S$ et tout $t > 0$; ce qui valide la domination sur S de la dérivée partielle d'ordre 2 suivant le paramètre puisque $t \to e^{-at}$ positive et notoirement intégrable ($a > 0$) sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{\text{La règle de Leibniz à l'ordre 2 implique bien que } f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ $\square$

Par ailleurs, pour $x > 0$, $\boxed{f'(x) = -\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}dt\ (1)}$ et $\boxed{f''(x) = \int_0^{\infty} (1-\cos t)e^{-xt}dt\ (2)}$ $\blacksquare$

b) On utilise le théorème de passage à la limite sous le signe $\int$ pour les deux situations.

On observe qu'à $t > 0$ fixé $\frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ et $-\frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ et que par ailleurs les dominations requises découlent de (*) et (**). Il en résulte, par passage à la limite sous le signe $\int$ que f et f'

admettent 0 comme limite à l'infini■
c) Partons de (2) qui donne $f"(x) = 1/x - Re(\int_0^\infty e^{(-x+i)t} = \frac{1}{x} - Re(\frac{1}{x-i}) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$, ce pour tout $x > 0$.
Par simple primitivation et, pour les mêmes x, il vient $f'(x) = \ln(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$, où C est un réel qui reste à déterminer.
C+Comme $\ln(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2} = \frac{\ln(\frac{x^2}{x^2+1})}{2} = -\frac{\ln(1+1/x^2)}{2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, la constante C est nulle en vertu de b). Bilan $\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) = \ln(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}}$■
d) On remonte à $f(x)$ par le même procédé (on effectue une primitivation par parties dans l'expression obtenue précédemment) et on récupère $f(x) = x\ln(x) - x - \frac{x\ln(x^2+1)}{2} + x - \arctan(x) + C' = -\frac{x\ln(1+1/x^2)}{2} + C' - \arctan(x)$, ce pour $x > 0$. En utilisant c) et d), il vient $C' = \frac{\pi}{2}$ et $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) + x\ln(x) - \frac{x\ln(x^2+1)}{2}$. Puis en faisant tendre x vers 0^+ (f continue en 0 par a), nous obtenons $\boxed{f(0) = \frac{\pi}{2}}$□
Une IPP généralisée, facile à valider, fournit $f(0) = \int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}dt = \left[-\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ soit $f(0) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ et $\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}}$■

Exercice ($\star\star$) **2** *(Une transformée de Fourier : Centrale PC)*
Pour $x \in \mathbb{R}$, *on pose* $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}dt$, *où* i *désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument* $\pi/2$.

1. *Montrer que la fonction* $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & F(x) \end{array}$ *est définie et de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.
   Soit k *un entier naturel non nul et soit* x *un réel. Donner une expression intégrale de* $F^{(k)}(x)$, *dérivée* k*-ième de* F *en* x. *Préciser* $F(0)$.
2. *Prouver que* F *vérifie sur* $\mathbb{R}$ *une équation différentielle de la forme* $F' + AF = 0$, *où* A *est une fonction à préciser.*
3. *En déduire une expression de* $F(x)$.
   On pourra commencer par dériver la fonction $x \mapsto -\frac{1}{8}\ln(1+x^2) + \frac{\mathrm{i}}{4}\arctan x$.

Exercice ($\star\star\star$) **1** *(Mines PC)*
Soit $f : x \to \int\limits_0^\infty sh(x\sqrt{t})e^{-t}dt$.
a) Montrer que f *est* C^2 *sur* $\mathbb{R}$.
b) Trouver une EDLO2 dont f *est solution.*
c) Donner une autre expression de f.

Exercice ($\star\star\star$) **2** *(X : Théorème de division preuve de René Thom)*
On se donne $f \in C^m(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *telle que* $f(0) = 0$ *avec* $m \geq 1$.
En étudiant $x \to \int_0^1 f'(tx)dt$, *montrer que* $g : x \to \frac{f(x)}{x}$ *se prolonge en une fonction* C^{m-1} *sur* $\mathbb{R}_+$.

Solution:
$\boxed{\text{On peut supposer } m \geq 2 \text{ car direct pour } m = 1}$.
Commençons par observer que $F(x) = \int_0^1 f'(tx)dt$ a du sens pour tout $x \geq 0$ puisque f' est continue sur $\mathbb{R}_+$.
De plus $F(0) = f'(0)$ et $F(x) = \left[\frac{f(tx)}{x}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{f(x)}{x}$ sinon.
On note déjà que $\boxed{F \text{ est un prolongement (par continuité) de } g \text{ (1)}}$.

Posons, pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$, $h(x,t) = f'(tx)$ ainsi on peut voir F comme une intégrale à paramètre à laquelle on applique la règle de Leibniz à l'ordre $m-1$. C'est en effet légitime puisque: i) Pour tout $t \in [0,1]$, $x \to h(x,t)$ est de classe C^{m-1} sur $\mathbb{R}+$ puisque f' l'est aussi.

ii) Pour tout $k \in [\![0, m-2]\!]$ et tout $x \geq 0$, $t \to \dfrac{\delta^k h}{\delta x^k}(x,t) = t^k f^{(k+1)}(xt)$ est continue sur les segment $[0,1]$ donc y est intégrable.

iii) Pour tout $x \geq 0$, $t \to \dfrac{\delta^{m-1} h}{\delta x^{m-1}}(x,t) = t^{m-1} f^{(m)}(xt)$ est continue par morceaux sur $[0,1]$ car continue sur ce segment.

iv) On domine la dérivée partielle d'ordre $m-1$ suivant x sur tout segment du type $[0,a]$, où $a > 0$.
Comme $f^{(m)}$ est continue sur ce segment, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \in [0,a]$ et tout $t \in [0,1]$, $|f^{(m)}(xt)| \leq A$. Dès lors, dans les mêmes conditions, $|\dfrac{\delta^{m-1} h}{\delta x^{m-1}}(x,t)| = |t^{m-1} f^{(m)}(xt)| \leq A$.
Comme toute constante est intégrable sur le segment [0,1], notre domination est validée.
Il en résulte que F est de classe C^{m-1} sur $\mathbb{R}_+$; ce qui répond à la question compte tenu de (1)□
On peut pousser plus loin notre avantage. La règle de Leibniz nous dit aussi que pour $k \in [\![1, m-1]\!]$ et tout $x \geq 0$, $F^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^1 t^k f^{(k+1)}(xt)dt$; en particulier $\boxed{F^{(k)}(0) = \dfrac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}}$ (valable aussi pour $k = 0$)■

Exercice (⋆⋆) 3 *(Intégrale de Frullani)*
Exprimer, suivant les réels strictement positifs a et b, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx$. *On pourra dériver selon le paramètre a.*

Exercice (⋆) 2 *(CCINP PSI : transformée de Laplace du sinus cardinal)*
Pour $x > 0$, on note:
$F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$, $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt$ *et* $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt$.

1. *Montrer que:* $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\sin(t)| \leq t$.
2. *Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur* $]0, +\infty[$.
3. *Montrer que* $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 0$.
4. *Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.*
5. *Trouver une expression simple pour G et pour H. On pourra calculer $H(x) + iG(x)$.*
   En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt$.
6. *En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?*

Solution:
Q1. Application classique (cf première année) de l'inégalité des accroissements finis■
Q2. On fixe le réel $x > 0$. Les trois intégrandes sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ pour la première et sur $\mathbb{R}_+$ pour les deux autres et sont dominées toutes les trois sur leur intervalle de définition par $t \to e^{-tx}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$; ce qui montre l'existence de nos trois intégrales généralisées■
Q3. On a donc pour tout $x > 0$ (Inégalité triangulaire + Q1) : $|F(x)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$. Le théorème des gendarmes permet de conclure aisément■
Q4. On va bien sûr utiliser la règle de Leibniz pour dériver sous le signe intégral.
On constate d'abord que :
•$\forall t > 0, x \to \dfrac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (exp l'étant elle-même).
•$\forall x > 0, t > 0 \to \dfrac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf Q2).
• $\forall x > 0, t \to \dfrac{\delta}{\delta x}(\dfrac{\sin(t)}{t} e^{-tx}) = -\sin(t) e^{-tx}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc y est continue par morceaux□
On procède ensuite à la domination (sur tout segment ici de la dérivée partielle de l'intégrande suivant le paramètre.

Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$, $x \in [a,b]$ alors :
$\forall t > 0, |-\sin(t)e^{-tx}| \leq e^{-at}$ et $t \to e^{-at}$ est bien positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ $\square$
Nous pouvons appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral à F.

Ainsi F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\boxed{\forall x > 0, F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin(t)dt = -G(x)}$ $\blacksquare$

Q5. On a facilement (et pour tout réel $x > 0$) $H(x) + iG(x) = \dfrac{1}{x-i} = \dfrac{x+i}{x^2+1}$ d'où $\boxed{G(x) = \dfrac{1}{x^2+1}}$ et $\boxed{H(x) = \dfrac{x}{x^2+1}}$ $\square$

Le changement de variable affine $t = \dfrac{u}{\alpha}$ donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)dt = \frac{H(x/\alpha)}{\alpha} = \boxed{\frac{\alpha^2}{x^2+\alpha^2}}$ $\blacksquare$

Q6 Les deux questions précédentes justifient l'existence d'un réel C tel que :
$\forall x > 0, F(x) = C - \arctan(x)$.
Sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$, il vient $C = \dfrac{\pi}{2}$.

En conclusion $\boxed{\forall x > 0, F(x) = \arctan(\frac{1}{x})}$ et $\boxed{F(1) = \frac{\pi}{2}}$ $\blacksquare$

Exercice (⋆⋆) 4 *(CCINP MP)*
Dans ce problème, on étudie certaines intégrales reliées aux intégrales dites de Fresnel.[a]
a) Démontrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt$ *converge.(Ecarter le problème en 0 et procéder à une IPP).*
On considère les fonctions g et f définies comme suit :
$\displaystyle g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}dt$ *pour x réel et* $f(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ *pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.*
b) Etablir que g est paire et prouver que g est continue sur $\mathbb{R}$.
c) Préciser les limites de g aux bornes de son intervalle de définition.
d) Prouver que g est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
On pourra dans la suite utiliser librement la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss.
e) Vérifier que $g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}$ pour $x > 0$.
f) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $x \to \dfrac{1}{x^2-i}$.
On admet ensuite que :
$$\frac{1}{X^2-i} = \frac{1-i}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1} + \frac{i}{X^2-X\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+X\sqrt{2}+1} + \frac{i}{X^2+X\sqrt{2}+1}\right),$$
ce pour tout réel X.
g) Démontrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt = \pi\sqrt{2}$. *Donner la valeur de* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt$ *puis déterminer la valeur de $g(0)$.*
h) En déduire que: $\displaystyle\forall x > 0,\ g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi} \times \int_0^x e^{it^2}dt.$
i) Donner ensuite les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt$, *de* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos\left(t^2\right)dt$ *et de* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin\left(t^2\right)dt$.

[a] Augustin Fresnel (1788-1827) démontra le caractère ondulatoire de la lumière et, pour cette raison, il est considéré comme un des fondateurs de l'optique moderne

Solution:
b) La parité provient de la parité de $x \to f(x,t)$, ce pour tout réel t.
On emploie alors le théorème de continuité sous le signe $\int$ en notant successivement que:
i) pour tout réel t, $x \to f(x,t)$ est notoirement continue sur $\mathbb{R}$,
ii) pour tout réel x, $t \to f(x,t)$ est C_M sur $\mathbb{R}$ car continue sur cet ensemble,
iii) pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x,t)| = \leq \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} = \phi(t)$.
On observe alors que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ paire, positive et qu'en ∞ $\phi(t) = O(1/t^2)$, ce qui en assure l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$.
Le théorème invoqué ci-dessus mène bien à la continuité g sur $\mathbb{R}$$\blacksquare$
c) La parité remarquée en b) fait que l'existence (et la valeur) de la limite en $+\infty$ va suffire.

Pour tout réel t et tout $x>0$ $|f(x,t)| \leq e^{-(xt)^2}$ et par croissance intégrale généralisée:
$0 \leq g(x) \leq \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(xt)^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{x}$ (en posant $t = xu$ et en utilisant la valeur de l'intégrale de Gauss). Le théorème des gendarmes donne 0 comme limite de g en $\mp\infty$■
d)e) On prouve le caractère C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (suffisant par parité) en utilisant le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ en se concentrant uniquement (à charge pous vous de combler les manques) sur la domination de la dérivée partielle suivant le paramètre.
Le fait que 0 est écarté par l'énoncé nous incite à une domination sur tou segment $[a,b]$, où $b>a>0$.
Or pour tout $x \geq a$ et tout réel t : $|\dfrac{\delta g}{\delta x}(x,t)| = 2xe^{-x^2t^2} \leq 2be^{-a^2t^2} = \psi(t)$.
ψ étant continue, positive, paire sur $\mathbb{R}$ et négligeable devant $t \rightarrow 1/t^2$ en $+\infty$ nous assure la domination souhaitée sur tout segment.
g est bien C^1 sur $\mathbb{R}^*$ avec $g'(x) = -2xe^{ix^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2} = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}$ (cf c) avec intégrale de Gauss), ce pour $x>0$■
g)(Fin) Avec ce qui précède: $g(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-i} = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} + \frac{(1-i)\sqrt{2}}{8}\left[\ln(\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1})\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} + 0 - 0$.
Soit $\boxed{g(0) = \dfrac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}}}$■
h) Simple primitivation de l'égalité obtenue en e) en tenant compte de la valeur de $g(0)$ trouvée précédemment■
i) On passe à la limite dans la relation trouvée en h) avec $x \rightarrow +\infty$ at grâce à a) et c) on trouve :
$\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = (1+i)\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$ et, en passant aux parties réelle et imaginaire,
$\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right) dt = \int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$■

♡ i)