Lycée Bellevue. Toulouse **PC***
2025-2026 **21 Novembre 2025**

TD 15 : Suites et Séries de Fonctions

Exercice ($\star$) 1 *(ENSEA)*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I = [0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$.
a) Etude de la convergence simple et uniforme sur I de la suite de fonctions (f_n).
b) Même question pour la suite de fonctions (f'_n).

Exercice ($\star\star$) 1 *(Exemple de Cantor)*
Pour tout entier naturel n et tout réel positif x, on définit $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$.
a) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
b) Prouver que la convergence n'est pas uniforme mais qu'elle le devient sur tout intervalle du type $[a,+\infty[$, où $a > 0$.

Exercice ($\star$) 2 *(CCINP PSI)*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(nt)}{1+n^4t^3}dt$.
a) Valider l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que $I_n = \dfrac{J_n}{n^{5/3}}$, où $J_n = \displaystyle\int_0^\infty n^{1/3}\frac{\sin(n^{-1/3}x)}{1+x^3}dx$.
c) Etablir que la suite (J_n) converge vers $K = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3}dx$. En déduire la limite de la suite (I_n).
d) A l'aide d'un changement de variable, prouver que $K = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}dx$.
e) Prouver que $2K = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.
f) En déduire un équivalent de I_n si $n \to \infty$.

Exercice ($\star\star$) 2 *(IMT et CVD?)*
Déterminer la limite de la suite $(I_n = \displaystyle\int_0^\infty f_n(t)dt)$ si: i) $f_n(t) = \dfrac{t^n}{1+t^{2n}}$ et ii) $f_n(t) = \dfrac{n\sin(t/n)}{t(1+t^2)}$.

Exercice ($\star\star\star$) 1 *(Mines)*
On se donne une suite (f_n) de fonctions croissantes, continues sur $[0,1]$ et convergeant simplement sur cet intervalle vers une fonction f qui y est continue.
a) Prouver que f est croissante sur $[0,1]$.
b) Etablir que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$(Dini).

Exercice ($\star\star\star\star$) 1 *(X)*
Soient $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ et, pour tout n et tout $x \in [0,1]$, $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(\frac{k}{n})x^k(1-x)^{n-k}$.
On admet que la suite de fonctions (P_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes à coefficients entiers.

Exercice ($\star$) 3 *(Exemple de Pringsheim)*

Soit $f : x \to x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (1+x^2)^{-n-1}$

a) Domaine de définition ?

b) Exprimer f. *Continuité de cette fonction?*

c) Y-a-t-il convergence uniforme sur $[-1,1]$?

Exercice ($\star$) 4 *Pour* $x \geq 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $u_n(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$.

On note U *la somme de cette série de fonctions.*

2) Vérifier que U *est de* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+$ *en précisant sa dérivée.*

3) U *possède -t-elle une limite finie en* $+\infty$?. *La déterminer en utilisant le théorème de la double limite.*

4) Par comparaison série - intégrale, déterminer un équivalent de U *en* $+\infty$.

Exercice ($\star\star$) 3 *(Formule de Leibniz)*

Pour $x \in I = [0,1]$, *on pose* $u_n(x) = (-1)^n x^{2n}$.

a) Prouver que $\sum_{n \geq 0} u_n$ *converge normalement sur tout segment de* $J = [0,1[$.

b) En déduire que $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ *pour tout* $x \in]-1,1[$.

c) En utilisant un théorème adapté, prouver que l'égalité précédente est vraie pour $x = \pm 1$.

Exercice ($\star\star\star$) 2 *(X 2021)*

On note D *le disque unité ouvert de* $\mathbb{C}$ *et on se donne* $0 < r < 1$*et* θ *un réel.*

a) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos(n\theta)}{n} = -\int_0^r \frac{x-\cos(\theta)}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} dx$.

b) En déduire que, pour $z \in D$, *on a :* $\ln|1-z| = -Re(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n})$.

c) Exprimer alors sous forme de somme de série l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + re^{i\theta}) d\theta$.

On pose $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(\max\left\{|e^{i\theta} - 1|, |e^{i\theta} + 1|\right\}\right) d\theta$.

d) Montrer que : $I = 4 \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

♡