Révisions

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto x\,(\ln(x))^n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer le domaine de définition D de f_n. Quelles sont les limites de f_n aux bornes de D ?
   (b) Étudier la dérivabilité de f_n, et calculer sa dérivée.
   (c) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente en e à la courbe de f_n.
2. (a) Résoudre l'équation $f_1(x) = f_2(x)$. En déduire les positions relatives des courbes de f_1 et de f_2.
   (b) Dresser le tableau de variations complet de f_1. Faire de même pour f_2.
   (c) Tracer, sur un même graphe, les courbes de f_1 et de f_2.
3. Dresser le tableau de variations de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *On pourra distinguer les cas n pair et impair.*
4. Rajouter au graphe précédent les courbes de f_3 et de f_4.

Exercice 2. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array} \right.$.

1. Déterminer tous les antécédents par f du couple $(4,4)$; du couple $(1,1)$; du couple $(0,-4)$.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ?
3. Montrer qu'un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ admet un antécédent par f si et seulement si $a^2 - 4b \geq 0$.
   Représenter graphiquement l'ensemble correspondant.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer l'image réciproque par f de la droite d'équation $x = a$, et l'image réciproque par f de la droite d'équation $y = b$. Représenter graphiquement ces ensembles.

Exercice 3. On considère les fonctions $f : x \mapsto 2\arctan(\sqrt{x-1})$ et $g : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x-1}}{x}\right)$.

1. Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f.
2. Faire de même avec g.
3. Calculer, là où cela est possible, $f'(x)$ et $g'(x)$. Que peut-on en déduire ?
4. Dresser les tableaux de variations de f et de g, avec leurs limites.
5. Tracer, sur le même graphe, les courbes de f et de g.

Exercice 4. On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{N}^*)^2 & \to & (\mathbb{N}^*)^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x \wedge y, x \vee y) \end{array} \right.$.

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(a,b) \in f^{-1}\left(\{d\} \times \mathbb{N}^*\right)$ si et seulement s'il existe $a', b' \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$.
2. En déduire $f^{-1}\left(\{(15, 180)\}\right)$.
3. Montrer que l'application f n'est ni injective, ni surjective.
4. Soit $(d,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On note $A = \{(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid x \leq y\}$.

(a) Montrer que si (d, m) admet un antécédent par f dans A, alors d divise m.

(b) Réciproquement, supposons que d divise m, et notons q le quotient de cette division.
Montrer que (d, m) admet un seul antécédent par f dans A si et seulement si q est premier.

5. En déduire $A',\ B \subset (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $f : A' \to B$ soit bijective.