# Révisions
CORRIGÉ

**Exercice 1.**

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_n(x)$ est défini lorsque $\ln(x)$ l'est, donc $D = \mathbb{R}_+^*$.
   On a directement : $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Et par croissances comparées, $f_n(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

   (b) La fonction $f_n$ est le produit de $x \mapsto x$ par $x \mapsto \ln x$ ($n$ fois), usuellement dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n'(x) = (\ln(x))^n + x \times n(\ln(x))^{n-1} \times \frac{1}{x} = (\ln(x))^{n-1}(\ln(x)+n).$$

   (c) La tangente en $e$ à la courbe de $f_n$ a pour équation :

$$y = f_n'(e)(x-e) + f_n(e) = (n+1)(x-e) + e = (n+1)x - ne.$$

2. (a) Soit $x \in D$. Comme $x \neq 0$, on a :

$$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow x\ln(x) = x\ln(x)^2 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \text{ ou } \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } e.$$

   Les courbes de $f_1$ et de $f_2$ se rencontrent donc deux fois, en $1$ et en $e$. Comme $f_1$ et $f_2$ sont continues, les positions relatives des courbes restent inchangées entre ces points.

   - Sur $]0,1[$ : $f_1(x) < 0$ et $f_2(x) > 0$, donc la courbe de $f_1$ est en-dessous de celle de $f_2$,
   - Sur $]1,e[$ : on a par exemple $f_1(2) = 2\ln 2 > f_2(2) = 2\ln^2(2)$ puisque $\ln 2 < 1$, donc la courbe de $f_1$ est au-dessus de celle de $f_2$,
   - Sur $]e,+\infty[$ : par croissances comparées, la courbe de $f_1$ est en-dessous de celle de $f_2$.

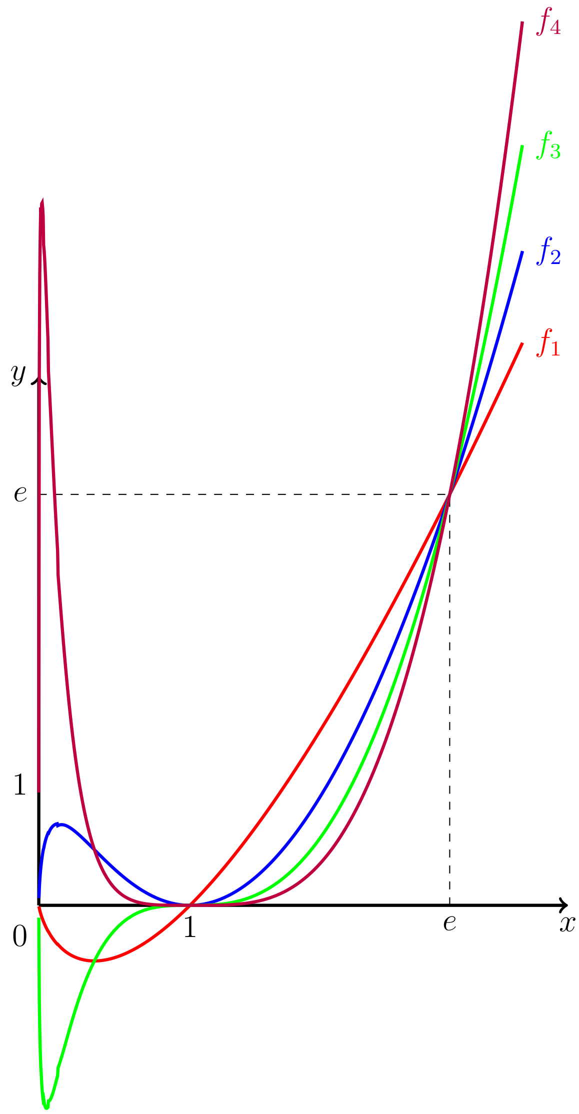
   (b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_1'(x) = \ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{e}$, d'où le tableau :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_1$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

   De même : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_2'(x) = \ln(x)\,(\ln(x)+2) > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{e^2}$ ou $x > 1$, d'où le tableau :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e^2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_2'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_2$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{e^2}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

(c)




3. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n'(x) = (\ln(x))^{n-1}\left(\ln(x)+n\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{e^n} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ x < \frac{1}{e^n} \text{ ou } x > 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$

   On en déduit, si $n$ est impair :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e^n}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{n^n}{e^n}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

   et si $n$ est pair :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e^n}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_2'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_2$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{n^n}{e^n}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4. Cf le graphe.

**Exercice 2.**

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{array}{rcl} f(x,y)=(4,4) & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 4 \\ xy & = & 4 \end{array}\right. \\ & \underset{z=x \text{ ou } y}{\Leftrightarrow} & 0=(z-x)(z-y)=z^2-4z+4=(z-2)^2 \\ & \Leftrightarrow & z=2 \\ & \Leftrightarrow & (x,y)=(2,2), \end{array}$$

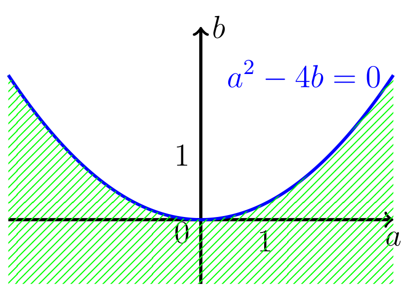
   donc $f^{-1}\left(\{(4,4)\}\right)=\{(2,2)\}$.
   De même :

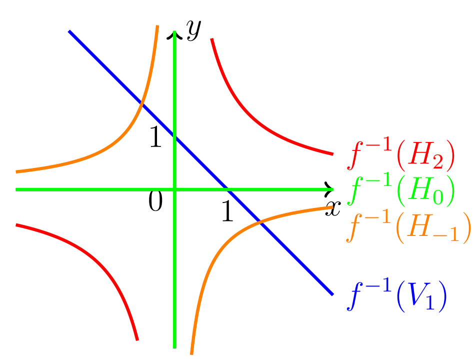
$$f(x,y)=(1,1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ xy & = & 1 \end{array}\right. \underset{z=x \text{ ou } y}{\Leftrightarrow} z^2-z+1=0,$$

   or ce trinôme a pour discriminant $\Delta=1-4=-3<0$, donc $f^{-1}\left(\{(1,1)\}\right)=\emptyset$, et :

$$f(x,y)=(0,-4) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ xy & = & -4 \end{array}\right. \underset{z=x \text{ ou } y}{\Leftrightarrow} z^2-4=0 \Leftrightarrow z=\pm 2 \underset{xy<0}{\Leftrightarrow} (x,y)=\pm(2,-2),$$

   donc $f^{-1}\left(\{(0,-4)\}\right)=\{(2,-2),(-2,2)\}$.
2. Comme $(0,-4)$ a deux antécédents, $f$ n'est pas injective.
   Comme $(1,1)$ n'a pas d'antécédent, $f$ n'est pas surjective.
3. Soient $(a,b),(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En notant à nouveau $z=x$ ou $y$ : $f(x,y)=(a,b) \Leftrightarrow z^2-az+b=0$.
   Ce trinôme a pour discriminant $\Delta=a^2-4b$; et $(a,b)$ admet un antécédent par $f$ si et seulement si ce trinôme a des racines réelles, c'est-à-dire $\Delta \geq 0$.
4. Notons $V_a=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=a\right\}$ et $H_b=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=b\right\}$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ :
   - $(x,y)\in f^{-1}(V_a) \Leftrightarrow x+y=a \Leftrightarrow y=a-x$, donc $f^{-1}(V_a)$ est la droite d'équation $y=a-x$.
   - $(x,y) \in f^{-1}(H_b) \Leftrightarrow xy=b \underset{\text{si } x\neq 0}{\Leftrightarrow} y=\dfrac{b}{x}$, et $0\times y=b \Leftrightarrow b=0$; or, dans le cas $b=0$ : $xy=b \Leftrightarrow x=0$ ou $y=0$. Donc : si $b\neq 0$, $f^{-1}(H_b)$ est l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{b}{x}$, et si $b=0$, $f^{-1}(H_0)$ est la réunion des axes d'équation $x=0$ et $y=0$.



**Exercice 3.**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre $f(x)$ est défini lorsque $x-1 \geq 0$, donc la fonction $f$ est définie sur $D_f = [1, +\infty[$ et continue sur cet intervalle car composée de fonctions usuellement continues. Elle est dérivable lorsque $x-1>0$, donc sur $D'_f = ]1, +\infty[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre $g(x)$ est défini lorsque $x \neq 0$, $x-1 \geq 0$, et $\dfrac{2\sqrt{x-1}}{x} \in [-1, 1]$, c'est-à-dire $4(x-1) \leq x^2$, c'est-à-dire $(x-2)^2 \geq 0$. Donc la fonction $g$ est définie sur $D_g = [1, +\infty[$ et continue sur cet intervalle comme composée de fonctions usuellement continues. Elle est dérivable lorsque $x-1>0$ et $\dfrac{2\sqrt{x-1}}{x} \in ]-1, 1[$, c'est-à-dire $x \neq 2$, donc sur $D'_g = ]1, 2[ \cup ]2, +\infty[$.

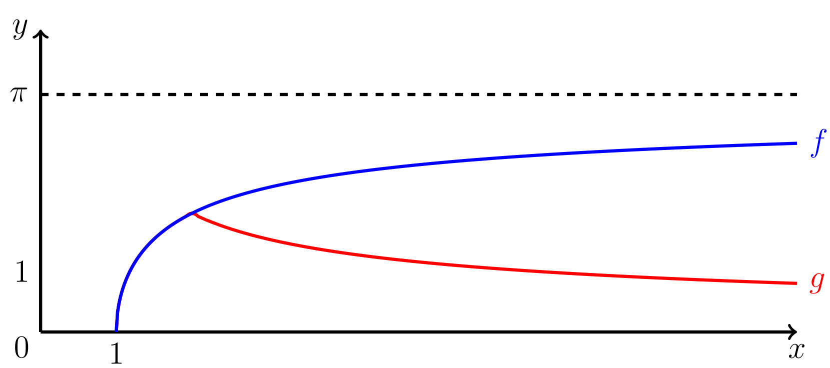
3. On a : $f = \arctan \circ u$ avec $u : x \mapsto \sqrt{x-1}$, donc : $\forall x \in D'_f,\ f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$, avec $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.
   Finalement : $\forall x \in D'_f,\ f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$.
   De même : $g = \arcsin \circ v$ avec $v : x \mapsto 2\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$, donc : $\forall x \in D'_g,\ g'(x) = \dfrac{v'(x)}{\sqrt{1-v(x)^2}}$, avec $v'(x) = \dfrac{2-x}{x^2\sqrt{x-1}}$. Finalement : $\forall x \in D'_g,\ g'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}} \dfrac{2-x}{|2-x|}$.
   Les deux fonctions ont la même dérivée sur $]1, 2[$, donc, comme elles sont continues en $1$ et en $2$, elles diffèrent sur $[1, 2]$ d'une constante égale à $f(1) - g(1) = 0 - 0 = 0$. Donc $f$ et $g$ sont égales sur $[1, 2]$.

4.

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $f$ | | | $\pi$ |
| | | $\nearrow$ | |
| | $0$ | | |

| $x$ | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | |
| $g$ | | | $\dfrac{\pi}{2}$ | | |
| | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |
| | $0$ | | | | $0$ |

5.



**Exercice 4.**

1. Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On a : $(a,b) \in f^{-1}(\{d\} \times \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow a \wedge b = d$, et, par définition du PGCD, $a \wedge b = d$ si et seulement s'il existe $a', b' \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$.
2. Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On a :
$$(a,b) \in f^{-1}(\{(15,180)\}) \Leftrightarrow (a \wedge b = 15 \text{ et } a \vee b = 180).$$
Or, d'après 1 : $(a \wedge b = 15)$ si et seulement s'il existe $a', b' \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $a = 15a'$ et $b = 15b'$. Alors :
$$\begin{aligned} (a,b) \in f^{-1}(\{(15,180)\}) &\Leftrightarrow (a' \wedge b' = 1 \text{ et } 15a'b' = 180) \\ &\Leftrightarrow (a' \wedge b' = 1 \text{ et } a' \times b' = 12) \\ &\Leftrightarrow (a',b') = (1,12),\ (3,4),\ (4,3),\ (12,1) \\ &\Leftrightarrow (a,b) = (15,180),\ (45,60),\ (60,45),\ (180,15). \end{aligned}$$
Finalement : $f^{-1}(\{(15,180)\}) = \{(15,180),\ (45,60),\ (60,45),\ (180,15)\}$.
3. D'après la question précédente, $(15,180)$ a 4 antécédents par $f$, donc $f$ n'est pas injective.
Par ailleurs : $\forall (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ a \wedge b \leq a \vee b$, donc, par exemple, $(3,2)$ n'a pas d'antécédent par $f$. Donc $f$ n'est pas surjective.
4. (a) Supposons que $(d,m)$ admette un antécédent par $f$ dans $A$, notons $(a,b)$ un tel antécédent. Alors, avec les notations de la question 1 : $da'b' = m$, donc $d$ divise $m$.
   (b) Soit $(a,b) \in A$. Avec les notations de la question 1 :
   $$\begin{aligned} (a,b) \in f^{-1}(\{(d,m)\}) &\Leftrightarrow (a \wedge b = d \text{ et } a \vee b = m) \\ &\Leftrightarrow (a' \wedge b' = 1 \text{ et } da'b' = m) \\ &\Leftrightarrow (a' \wedge b' = 1 \text{ et } a'b' = q). \end{aligned}$$
   Si $q$ est premier, alors :
   $$(a' \wedge b' = 1 \text{ et } a'b' = q) \Leftrightarrow (a',b') = (1,q) \Leftrightarrow (a,b) = (d,m),$$
   c'est-à-dire que $(d,m)$ est le seul antécédent de $(d,m)$ par $f$ dans $A$.
   Si $q$ n'est pas premier, notons $q = q_1 q_2$ avec $2 \leq q_1 \leq q_2 \leq q-1$, alors :
   $$(a' \wedge b' = 1 \text{ et } a'b' = q) \Leftarrow ((a',b') = (1,q) \text{ ou } (q_1,q_2)) \Leftarrow ((a,b) = (d,m) \text{ ou } (dq_1, dq_2)),$$
   c'est-à-dire que $(d,m)$ et $(dq_1, dq_2)$ sont deux antécédents distincts de $(d,m)$ par $f$.
   Donc $(d,m)$ admet un seul antécédent par $f$ dans $A$ si et seulement si $q$ est premier.
5. D'après la question 4, en notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers :
$A' = B = \left\{(d,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid \exists q \in \mathcal{P},\ m = qd\right\}$ conviennent.
Entre ces ensembles, l'application $f$ est l'application identité.