Feuille d'exercices 6
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 2.

(b) Notons $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[-1,1] \subset \left]-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$, donc $[-1,1] \subset B$.

Réciproquement, soit $x \in B$, montrons que $x \in [-1,1]$. Supposons par l'absurde que $|x| > 1$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|x| > 1 + \frac{1}{N}$: tout entier $N > \frac{1}{|x|-1}$ convient. Donc $x \notin \left]-1-\frac{1}{N}, 1+\frac{1}{N}\right[$, donc $x \notin B$, ce qui est absurde. Donc $|x| \leq 1$, donc $x \in [-1,1]$, et donc $B \subset [-1,1]$.

Donc $B = [-1,1]$.

Exercice 3.

(d) Si $B = C$, alors directement : $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

Réciproquement, supposons $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Soit $x \in B$, montrons que $x \in C$. Comme $x \in B$, $x \in A \cup B$, donc $x \in A \cup C$, donc $x \in C$ ou $x \in A$. Dans ce second cas, $x \in A \cap B$, donc $x \in A \cap C$, donc $x \in C$. Dans tous les cas, $x \in C$. Donc $B \subset C$.

De la même façon (le problème étant symétrique), $C \subset B$, donc $B = C$.

Donc $(A \cup B = A \cup C,\ A \cap B = A \cap C) \Leftrightarrow (B = C)$.

(e) Soit $x \in E$. Alors $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ si et seulement si ($x \in A$ et $x \notin B$ ou $x \notin C$), c'est-à-dire, d'après les lois de De Morgan, que ($x \in A$ et $x \notin B \cap C$) ; c'est-à-dire que $x \in A \setminus (B \cap C)$. Donc $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

(f) On utilise l'identité : $A \setminus B = A \cap \overline{B}$:

$$(A\setminus B)\setminus(A\setminus C) = (A\cap\overline{B})\cap\overline{A\cap\overline{C}} = (A\cap\overline{B})\cap(\overline{A}\cup C) = A\cap\overline{B}\cap C = A\cap C\cap\overline{B} = (A\cap C)\setminus B.$$

Exercice 4.

(a)
- Supposons que $E \subset F$, montrons que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.
  Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire $A \subset E$. Alors, comme $E \subset F$, $A \subset F$, donc $A \in \mathcal{P}(F)$. Donc $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.
- Réciproquement, supposons que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$, montrons que $E \subset F$.
  Soit $x \in E$, alors $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$, donc, comme $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$, $\{x\} \in \mathcal{P}(F)$. Donc $x \in F$. Donc $E \subset F$.

Donc $E \subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

(b) Soit $A \subset E$:

$$A \in \mathcal{P}(E\cap F) \Leftrightarrow A \subset E\cap F \Leftrightarrow (A \subset E \text{ et } A \subset F) \Leftrightarrow (A \in \mathcal{P}(E) \text{ et } A \in \mathcal{P}(F)) \Leftrightarrow (A \in \mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)),$$

donc $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

(c) Non : Avec $E = \{1,2\}$, $F = \{3,4\}$ et $A = \{1,3\}$: $A \in \mathcal{P}(E \cup F)$ mais $A \notin \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.
Plus généralement : on a toujours $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$, mais l'inclusion réciproque est fausse en général.

Exercice 5.

(a) Si $A \not\subset B$, alors : $\forall X \subset E$, $X \cup A \not\subset B$, donc $S = \emptyset$.
Si $A \subset B$, soit $X \subset E$: $X \cup A \subset B$ si et seulement si $B \setminus A \subset X$.
Donc $S = \{X \in E \mid B \setminus A \subset X \subset B\}$.

(b) Si $B \not\subset A$, alors : $\forall X \subset E$, $B \not\subset X \cap A$, donc $S = \emptyset$.
Si $B \subset A$, soit $X \subset E$: $X \cap A = B$ si et seulement si $B \subset X \subset \overline{A} \cup B$.
Donc $S = \{X \in E \mid B \subset X \subset \overline{A} \cup B\}$.

Exercice 6.

(a) On a directement : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A$.

(b) On a : $A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$.

(c) On a : $A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

(d) On a :
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (\overline{B} \cap \overline{\overline{A}}) \cup (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}) = (\overline{B} \setminus \overline{A}) \cup (\overline{A} \setminus \overline{B}) = \overline{B} \Delta \overline{A} = \overline{A} \Delta \overline{B}.$$

(e) On a : $A \cap (B \Delta C) = A \cap \big((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})\big) = \big(A \cap (B \cap \overline{C})\big) \cup \big(A \cap (C \cap \overline{B})\big)$,
où : $A \cap (B \cap \overline{C}) = (A \cap B) \cap \overline{C} = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = (A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,
et de même : $A \cap (C \cap \overline{B}) = (A \cap C) \setminus (A \cap B)$.
Donc : $A \cap (B \Delta C) = ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B)) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

(f) On raisonne par double implication :
- Supposons que $B = C$. Alors, directement : $A \Delta B = A \Delta C$.
- Réciproquement, supposons que $A \Delta B = A \Delta C$. Montrons que $B = C$.
  Soit $x \in B$. Montrons que $x \in C$.
  Comme $x \in B$, $x \in B \setminus A$ ou $x \in A \cap B$.
  - Si $x \in B \setminus A$, alors $x \in A \Delta B$. Donc, comme $A \Delta B = A \Delta C$, $x \in A \Delta C$. Donc, comme $x \notin A$, $x \in C \setminus A$. Donc $x \in C$.
  - Si $x \in A \cap B$, alors $x \notin A \Delta B$. Donc, comme $A \Delta B = A \Delta C$, $x \notin A \Delta C$. Donc, comme $x \in A$, $x \in A \cap C$. Donc $x \in C$.

  Donc $x \in C$.
  Donc $B \subset C$. Par symétrie des hypothèses, on a également $C \subset B$.
  Donc $B = C$.

Donc $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$.

Exercice 9.

Comme $i(1,0) = i(1,1) = (1,0)$, i n'est pas injective.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors (a,b) a pour antécédent par i le couple (a,c) où c est un antécédent de b par la fonction $y \mapsto ay - y^3$ (surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car polynomiale de degré impair). Donc i est surjective.

Exercice 11. Soient $A, B \subset E$. On a toujours : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (car $f(A \cap B) \subset f(A)$ et $f(A \cap B) \subset f(B)$).
Supposons f injective. Soient $A, B \subset E$. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$ et $b \in B$ tel que $y = f(b)$. Comme f est injective, $a = b$, donc $a \in A \cap B$, donc $y \in f(A \cap B)$. Donc $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$, donc $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
Réciproquement, supposons que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Soient $x, y \in E$ tels que

$f(x) = f(y)$. Si $x \neq y$, alors $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$, donc $f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\emptyset) = \emptyset \neq f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = \{f(x)\}$, ce qui est absurde. Donc $x = y$. Donc f est injective.

Exercice 12. Supposons qu'il existe $f : E \to F$ injective. Alors toute application $g : F \to E$ vérifiant, pour tout $y \in f(E)$, $g(y) = x$ où x est l'unique antécédent de y par f, est surjective.
Inversement, supposons qu'il existe $g : F \to E$ surjective. Alors toute application $f : E \to F$ définie par : $\forall x \in E,\ f(x) = y$ où y est un antécédent de x par g, est injective.

Exercice 13.

(a) Supposons par exemple f injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $h(x_1) = h(x_2)$. Alors $(f(x_1), g(x_1)) = (f(x_2), g(x_2))$ donc en particulier $f(x_1) = f(x_2)$ donc, comme f est injective, $x_1 = x_2$. Donc h est injective.

(b) Non en général. Par exemple si $E = F = G = \{0, 1\}$ et $f = g = \mathrm{Id}_E$, alors $h(0) = (0, 0)$ et $h(1) = (1, 1)$, donc $(0, 1) \in F \times G$ n'a pas d'antécédent par h. Donc h n'est pas surjective.