Test Intégrabilité et Intégrales à paramètre (55')

Question 1 *On pose, pour α réel et $t \in]0,1] = I$, $r_\alpha(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$.*
Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que r_α soit intégrable sur I.

Solution:
Le cours donne $\boxed{r_\alpha \in L^1(I) \iff \alpha < 1}$ ■

Question 2 *Soit u une fonction continue par morceaux sur I telle qu'il existe $\alpha < 1$ pour lequel: $t^\alpha u(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$. u est-elle intégrable sur I?*

Solution:
La continuité par morceaux sur I de u, fournie par l'énoncé et la comparaison $u(t) = o(1/t^\alpha)$ en 0 nous assurent ($\alpha < 1$ et Q1) de l'intégrabilité de u sur I ■

$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N},\ y > -1 \text{ et } t > 0, \text{ on pose } v(t) = t^y(\ln(t))^n e^{-t}}$.

Question 3 *En étudiant le comportement en $+\infty$ de $t^2 v(t)$, établir l'intégrabilité de v sur $J = [1, +\infty[$.*

Solution:
v est à l'évidence continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc C_M sur J et $t^2 v(t) = \dfrac{t^{y+2}(\ln(t))^n}{e^t} \underset{t\to\infty}{\to} 0$ (par croissance comparée).
Cette information (règle t^2 en $+\infty$) fait que $\boxed{v \in L^1(J)}$ ■

Question 4 *On pose $z = \dfrac{1-y}{2}$.*
En étudiant le comportement en 0^+ de $t^z v(t)$, établir l'intégrabilité de v sur I.
Qu'en conclure?

Solution:
La régularité sur I a été contrôlée à la question précédente.
Observons d'emblée que $y > -1 \Longrightarrow z < 1$ (*)
Puis on voit que $t^z v(t) = t^{\frac{1+y}{2}}(\ln(t))^n e^{-t} \underset{t\to 0}{\to} 0$ (par croissance comparée puisque $\dfrac{1+y}{2} > 0$). En combinant (*) et Q.2, nous obtenons l'intégrabilité de v sur I donc, avec la question précédente, sur $\mathbb{R}_+^*$ ■

On pose désormais, sous réserve de sens, $\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt}$.

Question 5 *Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction Γ?*

Solution:
L'intégrande de la fonction Γ correspond à la fonction v pour $n = 0$ et $y = x - 1$. Compte tenu de la conclusion de Q.4, Γ est au moins définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Mais en 0 et à x fixé nous avons $e^{-t}t^{x-1} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc la convergence en 0 n'est assurée (positivité des fonctions en jeu et Riemann en 0) que si $x > 0$. Autrement dit $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*}$ ■

Question 6 *A l'aide d'une intégration par parties généralisée que l'on justifiera soigneusement, prouver que, pour tout $x \in \mathcal{D}$: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*

Solution: Remarquons que les deux intégrales généralisées concernées par cette IPP sont convergentes puisque $x > 0$ entraîne $x + 1 > 0$.
Posons ($x > 0$ étant fixé) pour $t > 0$, $a(t) = -e^{-t}$ et $b(t) = t^x$. Les fonctions a et b sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $a(t)b(t) = -\dfrac{t^x}{e^t} \to 0$ si $t \to 0$ (car $x > 0$) et si $t \to +\infty$ (croissance comparée). Le théorème d'IPP généralisée donne alors l'égalité (on part d'une IG convergente et le crochet généralisé est nul) :
$\Gamma(x+1) = 0 - \displaystyle\int_0^{\infty} a(t)b'(t)dt = x\Gamma(x)$■

Question 7 *Montrer l'existence des deux intégrales généralisées* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}dt$ *et exprimer leurs valeurs à l'aide de* Γ.

Solution: Sous réserve d'existence notons A et B les valeurs de ces IG.
On peut considérer $\Gamma(1/2)$ et y effectuer le changement de variable légitime $t = u^2$, où $u > 0$. Celui conduit à l'égalité de deux valeurs d'IG convergentes(donc la première IG converge) à savoir : $\Gamma(1/2) = 2\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-u^2}(u^2)^{-1/2}udu$ soit $\boxed{A = \dfrac{\Gamma(1/2)}{2}}$□
En procédant dans $\Gamma(1/4)$ au changement de variable $t = u^4$, où $u > 0$, il vient de même convergence de la seconde IG et $\boxed{B = \dfrac{\Gamma(1/4)}{4}}$■

Question 8 *Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.*
Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a, b]$, $t^x \leq \max(t^a, t^b) \leq t^a + t^b$.

Solution: Si $t = 1$, c'est une évidence.
Fixons $t \in]0, 1[$ et posons $h(x) = t^x = exp(x \ln t)$; puisque $\ln t < 0$, h décroît sur $[a, b]$ donc pour tout x de cet intervalle $h(x) \leq h(a) \leq h(a) + h(b)$.
Même topo si $t > 1$, h étant croissante cette fois sur $[a, b]$ d'où même conclusion■

Question 9 *Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.*
Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{D}$, $\Gamma^{(k)}(x)$ sous forme d'une intégrale.

Solution: On va appliquer le théorème de dérivation pour une intégrale à paramètre à l'ordre $p \geq 1$ entier quelconque.
Pour $(x, t) \in \mathcal{D}^2$, on pose $f(x, t) = e^{-t}t^{x-1} = \dfrac{e^{-t}}{t}e^{x \ln t}$ et on observe que :
i) pour tout $t > 0$, $x \to f(x, t)$ est notoirement $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$,
ii) pour tout $x > 0$, $t \to f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$(vérifié en Q5),
iii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$ $t \to \dfrac{\delta^n f}{\delta x^n}(x, t) = t^{x-1}(\ln(t))^n e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc continue par morceaux sur ce même ensemble,
iv) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, nous disposons (pour $t > 0$ et $x \in [a, b]$) de:
$|t^{x-1}(\ln(t))^n e^{-t}| \leq |t^{a-1}(\ln(t))^n e^{-t}| + |t^{b-1}(\ln(t))^n e^{-t}|$ (en vertu de Q.8).
Comme Q.4 nous assure l'intégrabilité de $t \to t^{a-1}(\ln(t))^n e^{-t}$ et de $t \to t^{-1}(\ln(t))^n e^{-t}$, la domination sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ de TOUTES les dérivées partielles suivant le paramètre est acquise.
Dès lors la règle de Leibniz stipule que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$ et $\boxed{\Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1}(\ln(t))^k e^{-t}dt}$■

Question 10 *Montrer que Γ' s'annule en un unique réel ξ dont on déterminera la partie entière.*
En déduire les variations de Γ sur $\mathcal{D}$. Préciser en particulier les limites de Γ en 0 et en $+\infty$.
Préciser également les limites de Γ' en 0 et en $+\infty$. Esquisser le graphe de Γ.

Solution: L'expression intégrale de Γ'' montre sa stricte positivité partant Γ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne peut s'annuler qu'au plus une fois. On a aussi (intégrale de référence) $\boxed{\Gamma(1) = 1}$ et, avec Q.6, $\boxed{\Gamma(2) = 1}$ donc le théorème de Rolle appliqué à Γ sur le segment $[1, 2]$ (où elle est dérivable) montre l'existence d'un réel $\xi \in]1, 2[$ en lequel Γ' s'annule. Ainsi Γ' s'annule bien une et une seule fois et c'est en ce point. Enfin $\boxed{\lfloor \xi \rfloor = 1}$□

On a donc Γ strictement croissante sur $[\xi,+\infty[$ et pour $x \geq 2$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \geq x\Gamma(2) = x$, ce qui montre que $\boxed{\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty}$ $\square$

GPour $x > 0$, $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ donc en faisant tendre x vers 0 (Γ continue en 1), il vient $\boxed{\Gamma(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{x}}$ soit $\boxed{\Gamma(x) \underset{x\to0}{\to} +\infty}$ $\square$

En dérivant les deux membres de l'équation fonctionnnelle obtenue en Q6, on a :
$\Gamma'(x+1) = x\Gamma'(x) + \Gamma(x) \geq \Gamma(x)$ pour $x \geq \xi$ donc $\boxed{\Gamma'(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty}$ $\square$

Mais on a aussi $\Gamma'(x) = \dfrac{-\Gamma(x)+\Gamma'(x+1)}{x} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{-\Gamma(x)}{x}$ (continuité de Γ'en 1) d'où, avec ce qui précède, $\boxed{\Gamma'(x) \underset{x\to0}{\to} -\infty}$ $\blacksquare$

Question 11 *Etablir que la fonction* $\ln\circ\Gamma$ *est convexe sur* $\mathcal{D}$.

Solution: La fonction gamma est bien C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs strictement positives (intégrande continue et strictement positive). Nous pouvons donc évaluer la dérivée seconde de $\ln\circ\Gamma$:
$(\ln\Gamma)'' = (\dfrac{\Gamma'}{\Gamma})' = \dfrac{\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$ est positive; en effet, $\Gamma'(x)^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$ résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $(\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt)^2 \leq \int_0^{+\infty} f(t)^2dt \int_0^{+\infty} g(t)^2dt$ appliquée aux fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \sqrt{t^{x-1}e^{-t}}$ et $g(t) = (\ln(t))\sqrt{t^{x-1}e^{-t}}$ (qui sont bien de carré intégrable sur $]0,+\infty[$); la convexité désirée en découle $\blacksquare$

Graphe de Gamma: