TD 14 : Espaces vectoriels normés

Si rien n'est spécifié la scène se passe dans l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, où E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.

Exercice ($\star$) 1 *(Convergence)*
Soient $L \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On considère une suite (x_n) à termes dans E convergeant dans notre evn vers L ainsi qu'une suite (λ_n) à termes dans $\mathbb{K}$ convergeant vers λ.
Prouver que la suite $(\lambda_n x_n)$ converge vers λL dans l'evn considéré.
ind : Majorer $\|\lambda_n x_n - \lambda L\|$.

Solution: Il s'agit seulement d'adapter la preuve du fait que le produit de deux suites convergentes réelles converge vers le produit de leurs limites.
La suite (x_n) convergeant, elle est en particulier bornée. Soit $M > 0$ tel que $\|x_n\| \leq M$, ce pour tout n.
Alors et dans ce contexte : $0 \leq \|\lambda_n x_n - \lambda L\| = \|l(x_n - L) + (\lambda_n - l)x_n\| \leq |l|\|x_n - L\| + M|\lambda_n - l|$.
Le théorème des gendarmes permet de conclure$\blacksquare$

Exercice ($\star$) 2 *(Caractérisation séquentielle)*
Soit X une partie convexe de E. Etablir que l'adhérence de X est aussi convexe.

Solution: On se donne $t \in [0, 1]$, a et b dans l'adhérence de X. Ainsi a (resp. b) est limite d'une suite (a_n) (resp. (b_n)) à termes dans X. Considérons $c = (1-t)a + tb$ dont il s'agit de vérifier qu'il est aussi adhérent à X. Par linéarité des limites, la suite $((1-t)a_n + tb_n)$ converge bien vers c et elle est à termes dans X puisque X est convexe et donc que pour tout n : $(1-t)a_n + tb_n \in X$. Il en résulte que $c \in \overline{X}$$\blacksquare$

Exercice ($\star\star$) 1 *(Intérieur!)*
Soit X une partie convexe de E. Etablir que l'intérieur de X est aussi convexe.

Solution: Cette fois considérons a et b intérieurs à X ainsi qu'un réel $r > 0$ tel que les boules $B(a, r)$ et $B(b, r)$ soient contenues dans X. On se donne alors $t \in [0, 1]$ et $c = (1-t)a + tb$ avec pour but de montrer que ce dernier est aussi dans l'intérieur de X.
Nous allons vérifier (s'aider d'un dessin) que la boule ouverte $B(c, r) \subset X$.
Soit $y \in E$ tel que $\|y - c\| < r$ alors $a + y - c \in B(a, r) \subset X$ et $b + y - c \in B(b, r) \subset X$ donc, par convexité de X, il vient $(1-t)(a + y - c) + t(b + y - c) \in X \iff y \in X$. L'assertion en vue et prouvée et c est bien intérieur à X, ce qui montre que l'intérieur de X est convexe$\blacksquare$

Exercice ($\star\star$) 2 *(Intérieur!)*
Soit F un sous-espace vectoriel strict de E. Prouver que l'intérieur de F est vide.

Solution: Supposons l'intérieur de F non vide et montrons que $F = E$.
Soient a intérieur à F et $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset F$ ainsi que x un élément quelconque de E dont nous voulons montrer qu'il appartient à F.
(Là aussi un dessin peut soulager) On peut supposer $x \neq 0_E$ (sinon Fini) et remarquer que $a + \dfrac{1}{2r\|x\|}x = y \in B(a, r)$. Ainsi y et a sont des éléments de F et $x = 2r\|x\|(y - a)$; ce qui montre (F sev de E) que $x \in F$ soit $F = E$$\blacksquare$

Exercice ($\star\star$) 3 *(Fermé)*
Etablir que tout sev F de E est un fermé de E

Solution: Si $F = \{0_E\}$, c'est évident par critère séquentiel puisque toute suite à termes F est la suite nulle. Sinon supposons que $(e_1, ..., e_p)$ soit une base de F que l'on complète avec $e_{p+1}, ..e_n$ pour obtenir une base de E, notée b.
Nous allons appliquer le critère séquentiel en nous donnant une suite (x_k) à termes dans F convergeant vers $L \in E$. On espère montrer que $L \in F$.
En notant, pour tout k : $(y_1^k, ..., y_p^k, y_{p+1}^k = 0, ..., y_n = 0)$ les composantes selon b de x_k et $(l_1, ..., l_n)$ celles de L, la convergence de (x_k) vers L se traduit par :
$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $y_i^k \underset{k\to\infty}{\to} l_i$. Ce qui montre que $l_{p+1} = ... = l_n = 0$ donc que $L \in F$■

Exercice ($\star\star$) 4 *(Densité?)*
On note $\Delta(\mathbb{K})$ comme étant l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{K})$ diagonalisables.
a) Etablir que $\Delta(\mathbb{C})$ est dense dans $M_2(\mathbb{C})$.
b) Est-ce vrai dans le cas réel?

Solution: a) On veut montrer que toute matrice $M \in M_2(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables. C'est évident si M est diagonalisable. On suppose donc M non dz, il existe donc $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tels que $M = PTP^{-1}$, où $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

On pose alors $T_n = \begin{pmatrix} a + 1/n & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $M_n = PT_nP^{-1}$, ce pour $n \geq 1$.
Les matrices T_n (donc M_n car semblables) sont dz (deux vp $\neq$) et, par propriétés suites matrices (voir cours), la suite (M_n) converge vers M■
b) Prenons $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et supposons que la suite de matrices diagonalisables réelles ($M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$) converge vers M.
Le caractère dz de M_n impose à son polynôme caractéristique d'être scindé sur $\mathbb{R}$ donc d'avoir un discriminant positif. En conséquence et pour tout n : $D_n = (tr(M_n))^2 - 4\det(M_n) = (a_n - d_n)^2 + 4b_nc_n \geq 0$. Donc par passage à la limite (puisque $a_n \to 0$, $b_n \to 1$, $c_n \to -1$ et $d_n \to 0$), nous obtenons $-4 \geq 0$. Absurde donc le résultat a) ne vaut plus dans le cas réel■

Exercice ($\star\star\star$) 1 *(Distance à un fermé)*
Soient F une partie fermée non vide E et $a \in E$.
i) Etablir l'existence de $\inf\limits_{x\in F}(\|x - a\|)$.
Ce nombre est appelé la distance de a à F et se note $d(a, F)$.
ii) Montrer sur des exemples que cette distance peut être atteinte ou pas.
iii) Caractériser les $a \in E$ tels que $d(a, F) = 0$.
iiii) Soit $b \in E$. Vérifier que $|d(a, F) - d(b, F)| \leq \|a - b\|$

Solution:i) Résulte du fait que $\{\|x - a\|, x \in F\}$ est une partie non vide (puisque F ne l'est pas) de $\mathbb{R}$ (les normes sont des réels positifs), minorée par 0 et, en conséquence, admet bien une borne inférieure■
ii) Pour répondre dans le sens voulu, il faut sortir du cadre général imposé par le préambule du TD, à savoir la dimension finie. On verra pourquoi la semaine prochaine.
Néanmoins cette distance est atteinte si $E = \mathbb{R}^2$ que l'on munit de sa norme euclidienne usuelle (i.e $\|.\|_2$) avec F la sphère unité (donc le cercle unité) et $a = (0, 0)$.
Maintenant si je considère l'espace préhilbertien $E = L_c^2([0, 2\pi] = I)$ (voir cours) dans lequel on considère les $f_n : x \in I \to \sin(nx)$ pour tout $n \geq 1$ ainsi que $f = id_I$. On vérifie que $F = \{f_n, n \geq 1\}$ est un fermé de E.
Un simple calcul intégral fournit, pour n, m entiers naturels non nuls et distincts, $\|f_n - f_m\|_2 = \sqrt{2\pi}$. Cette information montre que les seules suites à termes dans F qui peuvent converger sont les suites stationnaires dont les limites sont évidemment dans F. Donc F est bien une partie fermée de E.
Pour tout $n \geq 1$, $\|f_n - f\|_2^2 = \|f_n\|_2^2 + \|f\|_2^2 - 2 < f_n, f >= \pi + \dfrac{8\pi^3}{3} - 2 < f_n, f >$ (en utilisant la structure préhilbertienne de E et avec un peu de calcul intégral).
Une IPP bien claire donne enfin $-2 < f_n, f >= \dfrac{4\pi}{n}$. Ainsi en posant $C = \pi + \dfrac{8\pi^3}{3}$, nous avons (et pour tout

$n \geq 1)\|f_n - f\|_2 = \sqrt{C + \dfrac{4\pi}{n}}$, ce qui montre que $d(f, F) = \sqrt{C}$ mais aussi que celle-ci n'est jamais atteinte$\blacksquare$
iii) Si $a \in F$ alors bien sûr $d(a, F) = 0$. Inversement si cette distance est nulle alors c'est que, pour tout $n \geq 1$, $1/n$ ne minore pas l'ensemble $\{\|x - a\|, x \in F\}$ (sinon $1/n$ serait minorant de l'ensemble et donc plus petit que le plus grand des minorants qui est, on le sait, la borne inférieure du dit-ensemble, 0 ici).
Dès lors (et pour tout $n \geq 1$), il existe $x_n \in F$ tel que $0 \leq \|x_n - a\| < 1/n$; le théorème des gendarmes fait que la suite (x_n), à termes dans F fermé, converge vers a. Par caractérisation séquentielle : $a \in F$. Soit $\boxed{d(a, F) = 0 \Longleftrightarrow a \in F}$$\blacksquare$

Exercice ($\star\star\star$) **2** *(Cube de Hilbert)*
Ici E est le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des suites (u_n) telles que la série $\sum_{n \geq 0} \dfrac{u_n}{2^n}$ soit absolument convergente.
On pose, pour $u = (u_n) \in E$, $\|u\| = \sum_{n=0}^{\infty} |\dfrac{u_n}{2^n}|$ et on note F comme étant l'ensemble des suites réelles dont tous les termes appartiennent à [-1,1].
F est-il un fermé de E?

Solution: On considère donc une suite $(v_p = (u_n^p)_n)_p$ à termes dans F convergeant vers $L = (l_n)_n \in E$.
Fixons un entier naturel n. On a $0 \leq |\dfrac{u_n^p - l_n}{2^n}| \leq \|v_p - L\|$, ce pour tout p.
La convergence supposée et le théorème des gendarmes impliquent que : pour tout n la suite $(u_n^p - l_n)_p$ converge vers 0 ou, si l'on préfère que la suite $(u_n^p)p$ converge vers l_n. La conservation des inégalités à la limite montre alors que $l_n \in [-1, 1]$ et donc que $L \in F$ ou que F est fermé$\blacksquare$

$\heartsuit$