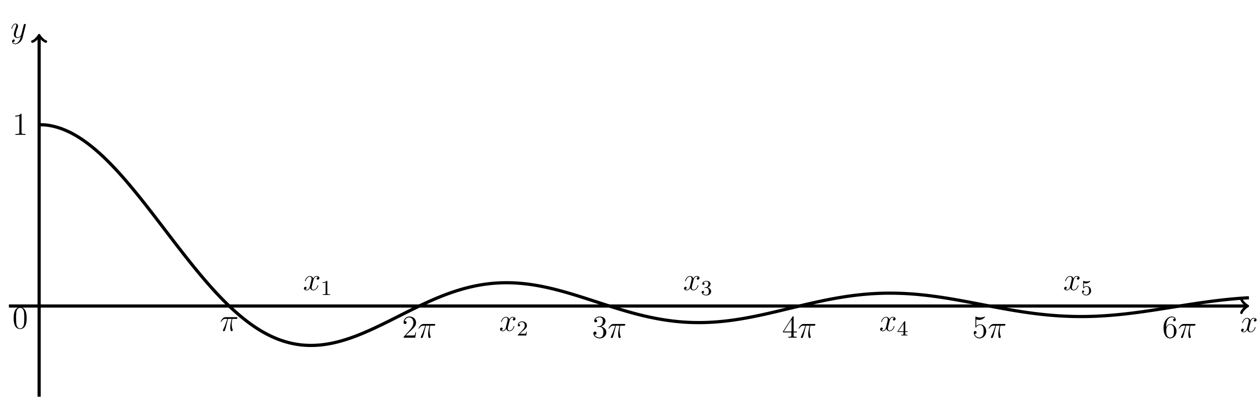
Devoir à la maison n$^\circ$ 4
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est le quotient de la fonction $\sin$ par la fonction $x \mapsto x$. Ces deux fonctions sont usuellement dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et $x \mapsto x$ ne s'y annule pas. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$
2. Comme $\dfrac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0)$. La fonction f est donc continue en 0.
3. Le taux d'accroissement de f en 0 s'écrit :
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \frac{\sin(x) - x}{x^2} \underset{x\to 0}{\simeq} -\frac{x}{6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
La fonction f est donc dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.
4. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -x\sin(x)$. La fonction g est donc décroissante sur $[0,\pi]$, avec $g(0) = 0$, donc g est négative sur $[0,\pi]$.
Comme : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, f est donc décroissante sur $[0,\pi]$.
(b) Si n est pair, $g(n\pi) = n\pi > 0$ et $g((n+1)\pi) = -(n+1)\pi < 0$. Comme g est continue et, d'après l'expression de $g'(x)$, strictement décroissante sur $[n\pi,(n+1)\pi]$, d'après le théorème de la bijection continue, g réalise une bijection de $I = [n\pi,(n+1)\pi]$ dans $g(I)$, qui contient 0. Elle s'annule exactement une fois sur I.
De même, si n est impair, $g(n\pi) < 0$, $g((n+1)\pi) > 0$ et g est strictement croissante sur $[n\pi,(n+1)\pi]$, donc g s'annule exactement une fois sur cet intervalle.
(c) Si n est pair, g est positive sur $[n\pi, x_n]$ et négative sur $[x_n,(n+1)\pi]$, donc f est croissante sur $[n\pi, x_n]$ et décroissante sur $[x_n,(n+1)\pi]$.
De même, si n est impair, g est négative sur $[n\pi, x_n]$ et positive sur $[x_n,(n+1)\pi]$, donc f est décroissante sur $[n\pi, x_n]$ et croissante sur $[x_n,(n+1)\pi]$.
5. Comme $\sin$ est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -\dfrac{1}{x} \le f(x) \le \dfrac{1}{x}$.
Donc, par encadrement, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
6.



Exercice 2.

1. Supposons que $A \subset B$. Montrons que $(E \setminus B) \subset (E \setminus A)$.
   Soit $x \in E \setminus B$. Montrons que $x \in E \setminus A$.
   On raisonne par l'absurde : supposons que $x \notin E \setminus A$. Alors $x \in A$. Donc, comme $A \subset B$, $x \in B$.
   C'est absurde puisque $x \in E \setminus B$.
   Donc $x \in E \setminus A$.
   Donc $(E \setminus B) \subset (E \setminus A)$.
   On a donc bien montré que : $(A \subset B) \Rightarrow ((E \setminus B) \subset (E \setminus A))$.
2. On vient de montrer l'implication :

   $$(A \subset B) \Rightarrow ((E \setminus B) \subset (E \setminus A)) .$$

   Notons $A' = E \setminus B$ et à $B' = E \setminus A$. Alors $E \setminus A' = B$ et $E \setminus B' = A$, donc l'implication précédente appliquée à A' et B' s'écrit :

   $$((E \setminus B) \subset (E \setminus A)) \Rightarrow (A \subset B).$$

   On a donc bien l'équivalence : $(A \subset B) \Leftrightarrow ((E \setminus B) \subset (E \setminus A))$.
3. (a) Supposons cette implication démontrée. En échangeant B et C, on a alors :

   $$(A \cap B = A \cap C) \Rightarrow (A \cap (E \setminus C) \subset A \cap (E \setminus B)) ,$$

   et donc : $(A \cap B = A \cap C) \Rightarrow (A \cap (E \setminus B) = A \cap (E \setminus C))$.
   En posant $B' = E \setminus B$ et $C' = E \setminus C$, on a alors :

   $$(A \cap (E \setminus B) = A \cap (E \setminus C)) \Rightarrow (A \cap B = A \cap C).$$

   On a donc bien l'équivalence voulue.

   (b) Supposons que $A \cap B = A \cap C$.
   Soit $x \in A \cap (E \setminus B)$. Montrons que $x \in A \cap (E \setminus C)$.
   On a $x \in A$ et $x \notin B$. Donc $x \notin A \cap B$, donc $x \notin A \cap C$.
   Or $x \in A$, donc $x \notin C$. Donc $x \in A \cap (E \setminus C)$.
   On a donc bien démontré l'implication voulue.
   D'après la question précédente, on a donc bien l'équivalence :

   $$(A \cap (E \setminus B) = A \cap (E \setminus C)) \Leftrightarrow (A \cap B = A \cap C).$$