Feuille d'exercices 7
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Alors k divise $n!$ et k divise k, donc k divise $n! + k$. Donc $n! + k$ n'est pas premier.
Il existe donc des ensembles d'entiers consécutifs arbitrairement grands ne contenant aucun nombre premier !

Exercice 2. Comme d'habitude, on raisonne par l'absurde : supposons $x = \dfrac{\ln 8}{\ln 7}$ irrationnel, soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{\ln 8}{\ln 7} = \dfrac{p}{q}$ (on prend directement $p \in \mathbb{N}^*$ car $x > 0$ (puisque $\ln$ est strictement positive sur $]e, +\infty[$)).
On a donc $\dfrac{\ln 8}{\ln 7} = \dfrac{p}{q}$, donc $8^q = 7^p$, donc $2^{3q} = 7^p$. D'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, on a nécessairement $p = q = 0$, ce qui est absurde.
Donc $\dfrac{\ln 8}{\ln 7}$ est irrationnel.

Exercice 3. On raisonne par récurrence :
Comme $40^0 \times 0! = 1$ divise $(5 \times 0)! = 1$, l'assertion est vraie pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons l'assertion vraie au rang n. Alors :

$$(5(n+1))! = (5n+5) \times (5n+4) \times (5n+3) \times (5n+2) \times (5n+1) \times (5n)!.$$

Par hypothèse de récurrence, $40^n \times n!$ divise $(5n)!$; il suffit donc de montrer que $40 \times (n+1)$ divise $(5n+5) \times (5n+4) \times (5n+3) \times (5n+2) \times (5n+1)$.
Comme $5n+5 = 5 \times (n+1)$, il suffit de montrer que 8 divise $(5n+4) \times (5n+3) \times (5n+2) \times (5n+1)$.
C'est un produit de 4 entiers consécutifs, qui contient donc un multiple de 4 et un autre entier pair ; donc le produit est divisible par 8.
Donc l'assertion est vraie au rang $n+1$.
Par récurrence, l'assertion est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.

(a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a : $3n - 17 = 3(n-4) - 5$ donc, si $n-4$ divise $3n-17$, alors $n-4$ divise 5, donc $n - 4 = \pm 1$ ou ± 5, donc $n \in \{-1, 3, 5, 9\}$. Réciproquement, tous ces nombres sont solutions, donc : $S = \{-1, 3, 5, 9\}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a : $2n^2 - 2n + 4 = 2(n+1)^2 - 6(n+1) + 8$ donc, si $n+1$ divise $2n^2 - 2n + 4$, alors $n+1$ divise 8, donc $n + 1 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$, donc $n \in \{-9, -5, -3, -2, 0, 1, 3, 7\}$. Réciproquement, tous ces nombres sont solutions, donc : $S = \{-9, -5, -3, -2, 0, 1, 3, 7\}$.

Exercice 6.

(a)

$$\begin{aligned} xy = 3x + 2y &\Leftrightarrow (x-2)(y-3) = 6 \\ &\Leftrightarrow (x-2, y-3) = (-6,-1),\ (-3,-2),\ (-2,-3),\ (-1,-6),\ (1,6),\ (2,3),\ (3,2),\ (6,1) \\ &\Leftrightarrow (x,y) = (-4,2),\ (-1,1),\ (0,0),\ (1,-3),\ (3,9),\ (4,6),\ (5,5),\ (8,4). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5} &\Leftrightarrow xy=5x+5y\\ &\Leftrightarrow (x-5)(y-5)=25\\ &\Leftrightarrow (x-5,y-5)=(-25,-1),\ (-5,-5),\ (-1,-25),\ (1,25),\ (5,5),\ (25,1)\\ &\Leftrightarrow (x,y)=(-20,4),\ (0,0),\ (4,-20),\ (6,30),\ (10,10),\ (30,6).\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x^2-y^2-4x-2y=5 &\Leftrightarrow (x-2)^2-(y+1)^2=10\\ &\Leftrightarrow (x+y-1)(x-y-3)=10\\ &\Leftrightarrow (x+y-1,x-y-3)=(-10,-1),\ (-5,-2),\ (-2,-5),\ (-1,-10),\\ &\qquad\qquad (1,10),\ (2,5),\ (5,2),\ (10,1),\end{aligned}$$

or $(x+y-1,x-y-3)=(a,b)\Leftrightarrow(2x-4,2y+2)=(a+b,a-b)$, ce qui est impossible si $a+b$ et $a-b$ sont impairs comme ci-dessus. Donc $S=\emptyset$.

Exercice 7.

(a) Pour $r=1$, on a $n=p_1^{\alpha_1}$. Les diviseurs de n sont alors les p_1^k où $k\in[\![0,\alpha_1]\!]$, donc $d(n)=\alpha_1+1$.

(b) Dans le cas général, les diviseurs de n sont les $\displaystyle\prod_{i=1}^{r}p_i^{k_i}$ où : $\forall i\in[\![1,r]\!]$, $k_i\in[\![0,\alpha_i]\!]$. Donc :

$$d(n)=\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i+1).$$

Exercice 8. Notons $n=\displaystyle\prod_{i=1}^{r}p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers de n. Les diviseurs de n sont alors les $d=\displaystyle\prod_{i=1}^{r}p_i^{\beta_i}$ avec $\beta_i\in[\![0,\alpha_i]\!]$. On a vu (exercice 8) que $N=\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i+1)$, et donc :

$$P=\prod_{\beta_1=0}^{\alpha_1}\cdots\prod_{\beta_r=0}^{\alpha_r}\left(\prod_{i=1}^{r}p_i^{\beta_i}\right)=\prod_{i=1}^{r}p_i^{(\alpha_1+1)\cdots\frac{\alpha_i(\alpha_i+1)}{2}\cdots(\alpha_r+1)}=n^{\frac{N}{2}}.$$

Exercice 9. Supposons que m divise n, notons $n=dm$. Alors, d'après l'identité de Bernoulli :

$$a^n-b^n=(a^m)^d-(b^m)^d=(a^m-b^m)\left((a^m)^{d-1}+(a^m)^{d-2}b^m+\cdots+a^m(b^m)^{d-2}+(b^m)^{d-1}\right),$$

donc a^m-b^m divise a^n-b^n.

Exercice 11. La fonction $f:x\mapsto x^3+x$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (le vérifier !) donc 1 admet un et un seul antécédent par f ; c'est-à-dire que l'équation $x^3+x=1$ a une et une seule solution réelle, d'ailleurs strictement positive d'après l'étude de f.

Supposons cette solution rationnelle égale à $\dfrac{p}{q}$ où $p,q\in\mathbb{N}^*$ peuvent être supposés premiers entre eux. Alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3+\frac{p}{q}=1,\quad\text{donc}\quad p^3+q^2p=q^3.$$

Soit d un diviseur premier de p, alors d divise p^3 et q^2p, donc d divise q^3, donc d divise q (puisque d est premier) ; ce qui est absurde puisque p et q sont premiers entre eux. Donc la solution est irrationnelle.

Exercice 13. Soit d un diviseur commun à $a = 2n+4$ et $b = 3n+3$. Alors d divise $3a - 2b = 6$, donc $d = 1, 2, 3, 6$. Ces quatre possibilités de PGCD sont réalisées pour $n = 1 \ : \ 6 \wedge 6 = 6$; pour $n = 2 \ : \ 8 \wedge 9 = 1$; pour $n = 3 \ : \ 10 \wedge 12 = 2$; pour $n = 4 \ : \ 12 \wedge 15 = 3$.

Exercice 14. Comme $x \wedge y = 15$, on pose $x = 15x'$ et $y = 15y'$ où x' et y' sont premiers entre eux. Comme $xy = 900$, on a alors $15^2 x'y' = 900$, donc $x'y' = 4$. Donc $(x', y') = (4, 1)$ ou $(1, 4)$, donc $(x, y) = (60, 15)$ ou $(15, 60)$.

Exercice 15. Comme $x \wedge y = 5$, on pose $x = 5x'$ et $y = 5y'$ où x' et y' sont premiers entre eux. Alors $x \vee y = 5x'y' = 60$, donc $x'y' = 12$, donc $(x', y') = (1, 12)$ ou $(3, 4)$ ou $(4, 3)$ ou $(12, 1)$. Donc $(x, y) = (5, 60)$ ou $(15, 20)$ ou $(20, 15)$ ou $(60, 5)$.

Exercice 16. Soit $M \in \mathbb{N}^*$. Par une récurrence directe sur $m \in \mathbb{N}^*$, on montre :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad u_{M+m} = u_m u_{M+1} + u_{m-1} u_M,$$

donc en particulier, pour $M = mn$:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{m(n+1)} = u_m u_{mn+1} + u_{m-1} u_{mn}. \qquad (\star)$$

Pour $n = 1$, on a donc : $u_{2m} = u_m(u_{m+1} + u_{m-1})$, donc u_m divise u_{2m} ; et d'après $(\star)$, si u_m divise u_{mn}, alors u_m divise $u_{m(n+1)}$. Par récurrence, u_m divise donc u_{mn} et $u_{m(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
De plus : $\forall k \in \mathbb{N}, \ u_k \wedge u_{k+1} = 1$, à nouveau par récurrence (sur la relation $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$). En particulier, $u_{mn} \wedge u_{mn+1} = 1$, donc si d divise u_{mn} et $u_{m(n+1)}$, alors d'après $(\star)$, d divise u_m.
Donc $u_{mn} \wedge u_{m(n+1)} = u_m$.

Exercice 18. Soit p un nombre premier.

(a) On sait que $\binom{p}{k} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{p \times (p-1)!}{k!(p-k)!}$. Comme p est premier, ni $k!$ ni $(p-k)!$ ne divisent p. Donc $\binom{p}{k} = p \times Q$, c'est-à-dire que p divise $\binom{p}{k}$.

(b) On procède par récurrence sur a :
$1^p = 1$, donc l'assertion est vraie pour $a = 1$.
Soit $a \in \mathbb{N}^*$, supposons l'assertion vraie au rang a. Alors, d'après le résultat précédent :

$$(a+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k = pQ + a^p + 1,$$

donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence : $(a+1)^p = a^p + 1 \mod p = a + 1 \mod p$.
Par récurrence, l'assertion est vraie pour tout $a \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 19.

(a) Notons $n = \sum_{k=0}^{r} a_k \times 10^k$ l'écriture binaire de n. Comme $10 = 1 \mod 9$, $n = \sum_{k=0}^{r} a_k \mod 9$. Donc n est multiple de 9 si et seulement si $\sum_{k=0}^{r} a_k$ est multiple de 9.

(b) Notons $n = \sum_{k=0}^{r} a_k \times 10^k$ l'écriture binaire de n. Comme $11 = (-1) \mod 11$, $n = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k a_k \mod 11$. Donc n est multiple de 11 si et seulement si $\sum_{k=0}^{r} (-1)^k a_k$ est multiple de 11.