

Devoir sur machine n°1

Durée : 1h50 – Tous documents autorisés

Les questions encadrées et numérotées doivent être validées par le professeur.

Les instructions précédées du signe $\triangleright$ doivent être exécutées, mais ne demandent pas de contrôle par le professeur.

Il est autorisé de sauter une ou plusieurs questions, mais il faut alors bien préciser au professeur quelle est la question pour laquelle il est appelé.

I. Des chiffres...

Exercice 1 : Itération.

- $\triangleright$ Écrire une fonction `f` qui prend en argument un entier n et qui renvoie les 4 derniers chiffres de $n^2 + 1$.

Question 1

Que vaut `f(12345)` ?

- $\triangleright$ Définir un entier N égal à votre année de naissance.

Question 2

- $\triangleright$ Afficher les 100 premières *images itérées* de N par f , c'est-à-dire N , $f(N)$, $f(f(N))$, $f(f(f(N)))$...
On utilisera une boucle `for`.

- $\triangleright$ Réessayez avec d'autres entiers N (de 4 chiffres ou plus).
 $\triangleright$ Que constatez-vous ?

Exercice 2 : Somme de carrés consécutifs.

On s'intéresse aux nombres entiers n tels que $n^2 + (n + 1)^2$ est un carré. On les appellera des entiers *mi-carrés*.

- ▷ Écrire une fonction `est_carre(N)` qui renvoie **True** si N est un carré, **False** sinon.
On définira pour cela la partie entière r de $\sqrt{N}$, et on testera si $r \times r = N$.

Question 3

Déterminer les entiers mi-carrés n inférieurs à 10000.

On affichera les triplets $(n, n+1, k)$ où k est tel que $n^2 + (n + 1)^2 = k^2$.

- ▷ Remplacer l'affichage précédent par l'affichage de k/n . Que constatez-vous ? Pouvez-vous l'expliquer ?

Exercice 3 : Nombres hyperpremiers.

Les *nombres hyperpremiers* sont les nombres premiers qui, lorsqu'on leur enlève des chiffres à droite, restent premiers.

Par exemple, 733 est un nombre hyperpremier, car 733, 73 et 7 sont premiers.

Question 4

Écrire une fonction `est_premier(n)` qui renvoie **True** si n est premier, **False** sinon.

- ▷ Définir une liste vide H .
▷ Ajouter une liste vide comme élément de H . On a alors : $H = [[]]$.
▷ Ajouter comme élément de H la liste des nombres premiers à 1 chiffre : $H = [[], [2, 3, 5, 7]]$.
▷ Pour tout a dans $H[1]$ et pour tout b dans $[0, 9]$, tester si $10a + b$ est premier. Si oui, ajoutez-le à une liste L . Ensuite, ajouter L comme élément de H .
La liste $H[2]$ contient alors les nombres hyperpremiers à 2 chiffres.

Question 5

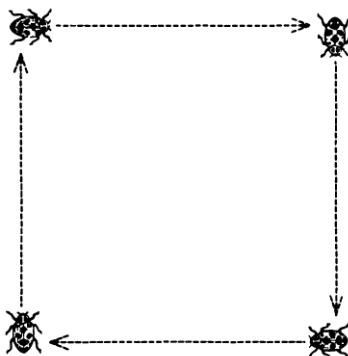
Déterminer de même la liste $H[3]$ des nombres hyperpremiers à 3 chiffres.

- ▷ En continuant ainsi, montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres hyperpremiers. Quel est le plus grand ?

II. ... et des dessins

Exercice 4 : Les quatre scarabées.

On s'intéresse à la question suivante : quatre scarabées sont initialement positionnées sur les sommets d'un carré. Chaque scarabée se dirige ensuite en ligne droite vers son voisin de gauche. Tous les scarabées avancent à la même vitesse. Quelles sont leurs trajectoires ?



- ▷ Définir les coordonnées initiales $x1$ et $y1$ du scarabée n°1, et de même pour les trois autres. On prendra par exemple un carré initial de côté 1.

Question 6

Représenter ces positions initiales sur un graphique. Pour afficher des points avec le module `matplotlib.pyplot`, on remplace la fonction `plot` par la fonction `scatter`.

- ▷ Définir les listes de coordonnées correspondantes : $X1=[x1]$, $Y1=[y1]$, etc.
 À chaque étape, les quatre scarabées se déplacent simultanément. On note k leur vitesse. Le scarabée n° i en position M_i se déplace alors en M'_i tel que :

$$\overrightarrow{M_i M'_i} = k \overrightarrow{M_i M_j},$$

où j est le numéro de son voisin de droite : $j = i + 1$ pour $i = 1, 2, 3$, et $j = 1$ pour $i = 4$.

- ▷ Compléter les listes Xi et Yi avec les 1000 premières positions des scarabées. On prendra $k=0.01$.

Question 7

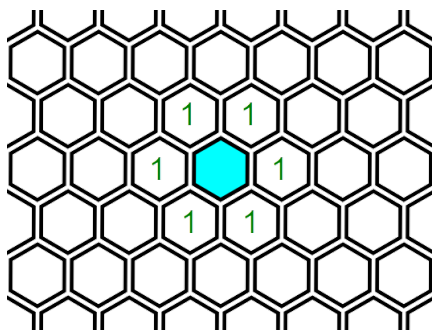
Représenter les trajectoires des quatre scarabées.

Exercice 5 : Flocons.

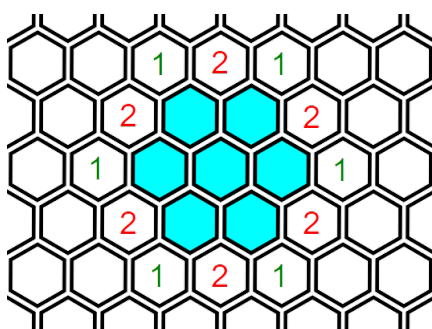
L'algorithme suivant modélise la croissance de flocons de neige.

On considère une grille hexagonale infinie. À l'étape initiale, une case hexagonale est coloriée. Puis, à chaque étape, on colorie les cases hexagonales qui sont adjacentes à une et une seule case hexagonale déjà coloriée lors d'une étape précédente.

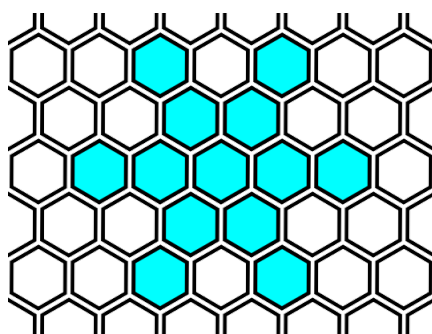
Les images suivantes montrent les trois premières étapes (le numéro dans les cases indique le nombre de cases adjacentes coloriées) : si ce nombre est 1, la case sera coloriée à l'étape suivante.



Étape 1



Étape 2



Étape 3

Question 8

Représenter le flocon obtenu au bout de 10 étapes, puis de 20 étapes.